Algebra lineare. Esercizi

Mauro Saita

Versione provvisoria, aprile 2016

Indice

[1]

[1]Per segnalare refusi o errori scrivere per favore a: maurosaita@tiscalinet.it
Nome file .tex: Esercizi_Agebra_Lineare_1_2016.tex

1 Spazi vettoriali. Sottospazi. Matrici.

Esercizio 1.1. *Verificare che il semipiano* $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x - y \geq 0\}$ *non è un sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^2$.

R

Esercizio 1.2. *Determinare tutti i sottospazi vettoriali degli spazi vettoriali* $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$. *Motivare le risposte.*

R

Esercizio 1.3. *Sia* V *uno spazio vettoriale e* $u, v \in V$. *Dimostrare che se* u, v *sono linearmente dipendenti e* $v \neq 0$ *allora* u *è multiplo di* v, *cioè esiste uno scalare* $\lambda \in \mathbb{R}$ *per il quale si ha* $u = \lambda v$.

R

Esercizio 1.4. *Dire se l'insieme dei polinomi di grado minore o uguale a* n

$$R_n[x] = \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$$

è uno spazio vettoriale e, in caso affermativo, determinare una base di tale spazio.

R

Esercizio 1.5. *L'insieme* $P_2[x] = \{a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}, \ a_2 \neq 0\}$ *di tutti i polinomi di grado 2 è uno spazio vettoriale?*

R

Esercizio 1.6. *Stabilire se il vettore* $v = (2, 3, 1)$ *di* $\mathbb{R}^3$ *appartiene allo spazio vettoriale generato dai vettori* $w_1(1, 1, 2)$, $w_2 = (5, 7, 4)$

R

Esercizio 1.7. *Sia* V *lo spazio vettoriale di dimensione infinita di tutte le funzioni da* $\mathbb{R}$ *a* $\mathbb{R}$. *Dimostrare che le seguenti coppie di funzioni sono linearmente indipendenti*

1. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \ f(t) = \sin t; \qquad \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}, \ g(t) = \cos t.$
2. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \ f(t) = e^{2t}; \qquad \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}, \ g(t) = e^{3t}.$

R

Esercizio 1.8. *Sia $\mathcal{M}(m \times n, \mathbb{R})$ l'insieme delle matrici di m righe e n colonne sul campo $\mathbb{R}$. Dopo aver definito in modo opportuno la somma di matrici e la moltiplicazione di una matrice per uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$, dimostrare che $\mathcal{M}(m \times n, \mathbb{R})$ costituisce un spazio vettoriale. Trovare una base di $\mathcal{M}(m \times n, \mathbb{R})$ e la sua dimensione.*

R

Esercizio 1.9. *Dimostrare che ognuno dei seguenti insiemi di matrici costituisce un sottospazio delle matrici $n \times n$ sul campo $\mathbb{R}$.*

1. *L'insieme delle matrici simmetriche $S_n = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid A = A^t\}$*
2. *L'insieme delle matrici antisimmetriche $A_n = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid A = -A^t\}$*
3. *L'insieme delle matrici diagonali $D_n = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid a_{ij} = 0 \text{ per ogni } i \neq j\}$*
4. *L'insieme delle matrici a traccia nulla $T_n = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid \sum a_{ii} = 0\}$*
5. *L'insieme delle matrici triangolari superiori*

$$\triangle_n = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid a_{ij} = 0 \text{ se } i < j\}$$

R

Esercizio 1.10. *Con riferimento all'esercizio precedente*

1. *Trovare* $\dim S_n$, $\dim A_n$, $\dim D_n$, $\dim T_n$, $\dim \triangle_n$.
2. *Dimostrare che ogni matrice quadrata $n \times n$ si scrive, in modo unico, come somma di una matrice simmetrica e di una matrice antisimmetrica.*

R

Esercizio 1.11. *Siano U_1, U_2 sottospazi di uno spazio vettoriale V. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false motivando le risposte*

1. *L'intersezione insiemistica $U_1 \cap U_2 = \{v \in V \mid v \in U_1 \text{ e } v \in U_2\}$ è un sottospazio di V.*
2. *L'unione insiemistica $U_1 \cup U_2 = \{v \in V \mid v \in U_1 \text{ oppure } v \in U_2\}$ è un sottospazio di V.*

R

Esercizio 1.12. *Dire se la matrice diagonale*

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

è invertibile. In caso affermativo si determini l'inversa.

R

Esercizio 1.13. *Siano A, B matrici $n \times n$ invertibili. Dimostrare le seguenti uguaglianze:*

1. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
2. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

R

Esercizio 1.14. *Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false. Motivare la risposta.*

1. *Se A e B sono matrici $n \times n$ simmetriche allora la matrice somma $A + B$ è simmetrica.*
2. *Se A e B sono matrici $n \times n$ simmetriche allora la matrice prodotto AB è simmetrica.*

R

Esercizio 1.15. *Dimostrare la seguente proposizione.*

Se una matrice simmetrica è invertibile allora la sua inversa è simmetrica.

R

1.1 Soluzioni

Esercizio 1.1 P non è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$, infatti $e_2 = (0, 1) \in P$ mentre $\lambda e_2 \notin P$ se $\lambda < 0$.

Esercizio 1.2 I sottospazi di $\mathbb{R}$ sono $\{0\}$ e $\mathbb{R}$, quelli di $\mathbb{R}^2$ sono $\{0\}$, le rette per l'origine e $\mathbb{R}^2$, i sottospazi di $\mathbb{R}^3$ sono $\{0\}$, le rette per l'origine, i piani per l'origine e $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 1.3 Per ipotesi esistono due scalari, non entrambi nulli per i quali si ha

$$hu + kv = 0 \tag{1.1}$$

Deve essere $h \neq 0$ (infatti se fosse $h = 0$, dalla 1.1 si avrebbe $kv = 0$ e cioè $k = 0$ assurdo, perchè entrambi gli scalare h, k sarebbero nulli, oppure $v = 0$ assurdo, perchè $v \neq 0$ per ipotesi). Quindi, da (1.1) si ricava $u = -\frac{k}{h}v$.

Esercizio 1.4 $R_n[x]$ è uno spazio vettoriale. Occorre verificare che: 1) 0 (= polinomio nullo) $\in R_n[x]$; 2) se $p, q \in R_n[x]$ allora $p+q \in R_n[x]$; 3) se $p \in R_n[x]$, $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\lambda p \in R_n[x]$.

Esercizio 1.5 $P_2[x]$ non è uno spazio vettoriale, infatti il polinomio nullo (elemento neutro rispetto all'usuale somma di polinomi) non appartiene a $P_2[x]$.

Esercizio 1.6 Il vettore v appartiene allo spazio vettoriale generato da w_1 e w_2. Infatti esistono due numeri reali h, k per i quali si ha: $hw_1 + kw_2 = v$. Posto $w_1 = (1, 1, 2)$, $w_2 = (5, 7, 4)$, $v = (2, 3, 1)$ si ottiene $(h + 5k, h + 7k, 2h + 4k) = (2, 3, 1)$. Quest'ultima uguaglianza è vera per $h = -\frac{1}{2}$, $k = \frac{1}{2}$.

Esercizio 1.7 *1.* Le funzioni $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(t) = \sin t$; $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, $g(t) = \cos t$ sono linearmente indipendenti infatti, $\lambda \sin t + \mu \cos t = 0$ per ogni t in $\mathbb{R}$, solo per $\lambda = \mu = 0$. *2.* Analogo al caso precedente.

Esercizio 1.8 Occorre verificare che la somma di matrici e la moltiplicazione di una matrice per uno scalare verificano le proprietà di spazio vettoriale. Una base di $\mathcal{M}(m \times n, \mathbb{R})$ è costituita dalle matrici E_i^j aventi la componente sulla i-esima riga e j-esima colonna uguale a 1 e tutte le altre nulle. Pertanto, $\dim \mathcal{M}(m \times n, \mathbb{R}) = mn$.

Esercizio 1.9 Per dimostrare che il sottoinsieme U di uno spazio vettoriale V è un sottospazio occorre verificare che: a) lo zero di V (cioè l'elemento neutro rispetto alla somma definita in V) sta anche in U; b) per ogni $u_1, u_2 \in U$, $u_1 + u_2 \in U$; per ogni $u \in U$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda u \in U$.

Esercizio 1.10

1. $\dim S_n = \frac{n(n+1)}{2}$, $\dim A_n = \frac{n(n-1)}{2}$, $\dim D_n = n$, $\dim T_n = n - 1$, $\dim \Delta_n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. Una qualsiasi matrice quadrata A si può scrivere nel seguente modo:

$$A = \frac{A + A^t}{2} + \frac{A - {}^tA}{2}$$

dove $\frac{A+A^t}{2}$ è una matrice simmetrica e $\frac{A-A^t}{2}$ una matrice antisimmetrica.

Per dimostrare l'unicità di tale scrittura si supponga che

$$A = A_1 + A_2, \qquad A = A_1' + A_2', \tag{1.2}$$

dove A_1, A_1' sono simmetriche, e A_2, A_2' sono antisimmetriche. Dalle equazioni 1.2 segue l'uguaglianza

$$A_1' - A_1 = A_2 - A_2'. \tag{1.3}$$

$A_1' - A_1$ è simmetrica, e $A_2 - A_2'$ antisimmetrica; poiché sono uguali, $A_1' - A_1$ e $A_2 - A_2'$ sono allora al tempo stesso simmetriche e antisimmetriche, e quindi nulle: $A_1' - A_1 = 0$ e $A_2' - A_2 = 0$. Pertanto $A_1' = A_1$ e $A_2' = A_2$.

Esercizio 1.11 *1.* $U_1 \cap U_2$ è un sottospazio di V.*2.* L'unione insiemistica $U_1 \cup U_2$ non è un sottospazio di V. Sia, ad esempio, $V = \mathbb{R}^2$ e U_1, U_2 due rette distinte contenenti l'origine; $U_1 \cup U_2$ non è chiusa rispetto alla somma.

Esercizio 1.12 In questo caso conviene ricercare (l'eventuale) inversa con un calcolo diretto. Si ottiene

$$D^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{vmatrix}$$

Esercizio 1.13 1. Per definizione di inversa, si deve provare $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$ e $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$.

$$\begin{array}{rcll} (AB)(B^{-1}A^{-1}) & = & A(BB^{-1})A^{-1} & \text{(proprietà associativa)} \\ & = & AIA^{-1} & \text{(definizione di inversa)} \\ & = & AA^{-1} & \text{(I è l' identità del prodotto)} \\ & = & I & \text{(definizione di inversa)} \end{array}$$

In modo analogo si dimostra che $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$.

2. Si deve dimostrare che $A^t\,(A^{-1})^t = (A^{-1})^t\,A^t = I$

$$\begin{array}{rcll} A^t\,(A^{-1})^t & = & (A^{-1}A)^t & \text{(perché $B^tA^t = (AB)^t$)} \\ & = & I^t & \text{(per definizione di inversa)} \\ & = & I & \text{(perché $I^t = I$)} \end{array}$$

In modo analogo si dimostra che $(A^{-1})^t\,A^t = I$.

Esercizio 1.14

1. Vero. L'insieme delle matrici simmetriche $S_n = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid A = A^t\}$ è un sottospazio delle matrici $n \times n$ sul campo $\mathbb{R}$ (Esercizio 1.9). Pertanto $\forall A, B \in S_n$ si ha che $A + B \in S_n$

2. Falso. Infatti $(AB)^t = B^tA^t = BA$ e $BA \neq AB$ (il prodotto di matrici non è commutativo).

Esercizio 1.15 Una matrice A simmetrica coincide con la sua trasposta ($A^t = A$). Allora

$$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1} = A^{-1}$$

2 Applicazioni lineari

Esercizio 2.1. *Scrivere la definizione di applicazione (funzione)* lineare $\mathbb{R}^n \xrightarrow{T} \mathbb{R}^m$. *Descrivere in modo analitico tutte le applicazioni lineari* $\mathbb{R} \xrightarrow{T} \mathbb{R}$; $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{T} \mathbb{R}$; $\mathbb{R} \xrightarrow{T} \mathbb{R}^3$.

R

Esercizio 2.2. *Dire quali delle seguenti applicazioni sono lineari motivando la risposta*

1. $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{F} \mathbb{R}$, $F(x, y) = 3x - 5y$.
2. $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{F} \mathbb{R}^2$, $F(x, y, z) = (e^{2x+y}, z - y)$.
3. $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{F} \mathbb{R}$, $F(x, y, z) = x^2 + y + 3z$.
4. $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{F} \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (0, 0, 0)$.
5. $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{1_{\mathbb{R}^3}} \mathbb{R}^3$, $1_{\mathbb{R}^3}(x, y, z) = (x, y, z)$.

R

Esercizio 2.3. *Sia* $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{T} \mathbb{R}$ *una applicazione lineare, tale che* $T(e_1) = 11$ *e* $T(e_2) = 2$, *dove* $e_1 = (1, 0)$ *e* $e_2 = (0, 1)$. *Quanto vale* $T(-3, 5)$*?*

R

Esercizio 2.4. *Dire per quali eventuali valori di* $k \in \mathbb{R}$ *la funzione* $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{F} \mathbb{R}$,

$$F(x, y, z) = (2 - k^2)x + 3y + (1 + k)z + 23 - k$$

è lineare.

R

Esercizio 2.5. *Siano* V, W *due spazi vettoriali e* $V \xrightarrow{F} W$ *un'applicazione lineare. Dimostrare le seguenti affermazioni*

1. *Il nucleo di* F, $\ker F = \{v \in V \,|\, F(v) = 0\}$ *è un sottospazio vettoriale di* V.
2. *L'immagine di* F, $\operatorname{Im} F = \{w \in W \,|\exists v \in V \;\; F(v) = w\}$ *è un sottospazio vettoriale di* W.

R

Esercizio 2.6. *Sia* $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$.

a) Dimostrare che W *è un sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^3$.

b) Trovare una base di W *e la sua dimensione.*

R

Esercizio 2.7. *Siano* $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{F} \mathbb{R}^2$ *e* $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{G} \mathbb{R}^2$ *due applicazioni lineari così definite:* $F(e_1) = (1,2)$, $F(e_2) = (-1,3)$ *e* $G(e_1) = (-2,1)$, $G(e_2) = (4,1)$.

Determinare $\mathcal{M}(G \circ F)$ *e scrivere in modo esplicito* $G \circ F$. *Verificare inoltre che* $\mathcal{M}(G \circ F) = \mathcal{M}(G) \cdot \mathcal{M}(F)$

R

Esercizio 2.8. *Siano* $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{F} \mathbb{R}^3$ *e* $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{G} \mathbb{R}$ *due applicazioni lineari così definite:*

$$F(x,y) = (2x - 5y, 3x, x - y),\ G(x,y,z) = (2x - y + 5z)$$

Determinare $\mathcal{M}(G \circ F)$ *e scrivere in modo esplicito* $G \circ F$.

R

Esercizio 2.9. *Sia* $M(n \times n, \mathbb{R})$ *lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine* n *sul campo* $\mathbb{R}$ *e* $A = \big(a_{ij}\big)$ *una qualunque matrice di tale spazio. Dimostrare che la funzione 'traccia'*

$$M(n \times n, \mathbb{R}) \xrightarrow{tr} \mathbb{R}, \qquad tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

è lineare.

R

Esercizio 2.10. *Siano rispettivamente* (e_1, e_2, e_3) *e* (c_1, c_2) *le basi canoniche di* $\mathbb{R}^3$ *e* $\mathbb{R}^2$. *Dimostrare che esiste un'unica applicazione lineare* $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{F} \mathbb{R}^2$ *per la quale si ha*

$$F(e_1) = (1,1) \qquad F(e_2) = (1,0) \qquad F(e_3) = (1,2) \tag{2.1}$$

Scrivere in modo esplicito $F(x,y,z)$ *per ogni* (x,y,z) *di* $\mathbb{R}^3$.

R

Esercizio 2.11. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

1. *Scrivere in modo esplicito l'applicazione lineare* L_A *associata alla matrice* A.
2. *Trovare* $\ker L_A$ *e* $\mathrm{Im}\ L_A$.
3. *Determinare* $\dim \ker L_A$ *e* $\dim \mathrm{Im}\ L_A$.

R

Esercizio 2.12. *Si consideri l'applicazione lineare* $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{F} \mathbb{R}^3$, $F(x,y,z) = (x - 2z, x + y + z, 3y - z)$. *Scrivere la matrice* $\mathcal{M}(F)$ *che rappresenta* F *rispetto alla base canonica di* $\mathbb{R}^3$.

R

Esercizio 2.13. *Siano* $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{F} \mathbb{R}^3$ *e* $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{G} \mathbb{R}$ *due applicazioni lineari così definite:*

$F(x,y) = (2x - 5y, 3x, x - y)$, $G(x,y,z) = (2x - y + 5z)$. *Determinare* $\mathcal{M}(G \circ F)$ *e scrivere in modo esplicito* $G \circ F$.

R

Esercizio 2.14. *Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false motivando le risposte.*

1. $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \qquad \forall A, B \in \mathcal{M}(2 \times 2, \mathbb{R})$.
2. $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B) \qquad \forall A, B \in \mathcal{M}(2 \times 2, \mathbb{R})$.

R

Esercizio 2.15. *Sia* $M(n \times n, \mathbb{R})$ *lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine* n *sul campo* $\mathbb{R}$ *e* $A = \big(a_{ij}\big)$ *una qualunque matrice di tale spazio. Dimostrare che, la funzione 'traccia'*

$$M(n \times n, \mathbb{R}) \xrightarrow{tr} \mathbb{R}, \qquad tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

è un'applicazione lineare. Dimostrare inoltre che

1. *Il sottospazio di* $M(n \times n, \mathbb{R})$ *delle matrici a traccia nulla ha dimensione* $n^2 - 1$. *In altri termini, verificare che* $\dim \operatorname{Ker} tr = n^2 - 1$.
2. $tr(AB) = tr(BA)$
3. $tr(B^{-1}AB) = tr A$

R

Esercizio 2.16. *Sia* $A = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -2 & -8 & 3 \\ 1 & 4 & k \end{vmatrix}$ *e sia* $L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *l'applicazione lineare definita ponendo* $L_A(X) = AX$, *per ogni* $X \in \mathbb{R}^3$.

1. *Dire per quali valori del numero reale* k, *l'applicazione* L_A *è iniettiva.*
2. *Dire per quali valori del numero reale* k, *l'applicazione* L_A *è suriettiva.*
3. *Determinare, per ogni* $k \in \mathbb{R}$, *una base di* $\ker(F)$ *e una base di* $\operatorname{Im}(F)$.

$\boxed{R}$

Esercizio 2.17. *Sia* $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *l'applicazione lineare definita da*

$$F(x, y) = (x - y, 0, 2x - 2y),$$

e sia $G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *l'applicazione lineare definita da*

$$G(x, y, z) = (x, 0, x - z).$$

1. *Trovare una base di* $\operatorname{Im} F$.
2. *Trovare una base di* $\ker F$.
3. *Dette rispettivamente* $\mathcal{C}_2$ *e* $\mathcal{C}_3$ *le basi canoniche di* $\mathbb{R}^2$ *e di* $\mathbb{R}^3$*, scrivere la matrice*

$$M_{\mathcal{C}_3}^{\mathcal{C}_2}(G \circ F)$$

$\boxed{R}$

Come cambiano le componenti di un vettore quando cambia la base?

Esercizio 2.18. *Rispetto alla base canonica* $\mathcal{B}$ *di* $\mathbb{R}^2$*, il vettore* v *ha coordinate* $(2, -1)$*. Trovare le componenti di* v *rispetto alla base* $\mathcal{B}'$ *costituita dai vettori* $e_1' = (1, 3)$*,* $e_2' = (-1, -1)$*.*

$\boxed{R}$

Esercizio 2.19. *Si consideri la base* $\mathcal{B}' = ((1, 1, 0), (-1, 1, 0), (0, 0, 1))$ *di* $\mathbb{R}^3$ *e sia* v *il vettore di coordinate* $(1, 2, 0)$ *rispetto alla base canonica* $\mathcal{B}$ *di* $\mathbb{R}^3$*. Trovare le coordinate di* v *rispetto alla base* $\mathcal{B}'$*.*

$\boxed{R}$

Come cambia la matrice che rappresenta un'applicazione lineare quando cambia la base?

Esercizio 2.20. *Sia* $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{S} \mathbb{R}^2$*, la simmetria rispetto alla bisettrice* $x - y = 0$*. Sia* $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ *la base canonica di* $\mathbb{R}^2$ *e* $\mathcal{B}' = (e_1', e_2')$ *un'altra base di* $\mathbb{R}^2$ *così definita:* $e_1' = (1, 1) = e_1 + e_2$*,* $e_2' = (1, -1) = e_1 - e_2$*.*
Determinare $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(S)$ *e* $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(S)$*.*

$\boxed{R}$

Esercizio 2.21. *In* $\mathbb{R}^3$ *si considerino le basi* $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ *e* $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ *dove*

$$e_1' = e_3, \quad e_2' = e_1 - e_2, \quad e_3' = e_2.$$

Sia $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{F} \mathbb{R}^3$ *l'operatore così definito:*

$$F(e_1) = e_1 + e_2,\ F(e_2) = e_3,\ F(e_3) = 0$$

1. *Trovare* $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$
2. *Trovare* $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(F)$
3. *Sia* v *il vettore di* $\mathbb{R}^3$ *le cui coordinate, rispetto alla base* $\mathcal{B}'$*, sono* $[v]_{\mathcal{B}'} = (1,0,1)$*. Scrivere le coordinate* $[v]_{\mathcal{B}}$ *di* v *rispetto alla base* $\mathcal{B}$*.*

$\boxed{R}$

2.1 Soluzioni

Esercizio 2.1 Un'applicazione lineare $\mathbb{R} \xrightarrow{T} \mathbb{R}$ è lineare se e solo se

$$T(x) = \alpha x$$

dove α è un qualunque numero reale.

Un'applicazione lineare $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{T} \mathbb{R}$ è lineare se e solo se esistono tre numeri reali α, β, γ per i quali

$$T(x,y,z) = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

Un'applicazione lineare $\mathbb{R} \xrightarrow{T} \mathbb{R}^3$ è lineare se e solo se esistono tre numeri reali α, β, γ per i quali

$$T(x) = (\alpha x, \beta x, \gamma x)$$

Esercizio 2.2 Sono lineari le seguenti applicazioni:

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{F} \mathbb{R}$, $F(x,y) = 3x - 5y$;

$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{F} \mathbb{R}^3$, $F(x,y,z) = (0,0,0)$;

$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{1_{\mathbb{R}^3}} \mathbb{R}^3$, $1_{\mathbb{R}^3}(x,y,z) = (x,y,z)$.

Esercizio 2.3 $T(-3,5) = T(-3e_1 + 5e_2) = -3T(e_1) + 5T(e_2) = -3 \cdot 11 + 5 \cdot 2 = -23$

Esercizio 2.4 $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{F} \mathbb{R}$, $F(x,y,z) = (2-k^2)x + 3y + (1+k)z + 23 - k$ è lineare per $k = 23$.

Esercizio 2.5

1. L'insieme Ker F è chiuso rispetto alla somma, infatti se $v_1, v_2 \in \text{Ker } F$ si ha $F(v_1) = 0$, $F(v_2) = 0$. Allora $F(v_1 + v_2) = F(v_1) + F(v_2) = 0 + 0 = 0$ e quindi anche $v_1 + v_2$ appartiene a Ker F; l'insieme Ker F è chiuso rispetto alla moltiplicazione per uno scalare, infatti se λ è un qualunque numero e $v \in \text{Ker } F$, allora $F(\lambda v) = \lambda F(v) = \lambda \cdot 0 = 0$, quindi $\lambda v \in \text{Ker } F$. Infine $0 \in \text{Ker } F$ cioè $F(0) = 0$.

2. Siano $w_1, w_2 \in \text{Im } F$, ciò significa che esistono $v_1, v_2 \in V$ tali che $w_1 = F(v_1)$ e $w_2 = F(v_2)$. Allora $w_1 + w_2 = F(v_1) + F(v_2) = F(v_1 + v_2)$ e quindi anche $w_1 + w_2$ appartiene a Im F. Se λ è un qualunque numero, allora $\lambda w_1 = \lambda F(v_1) = F(\lambda v_1)$ e quindi λw_1 appartiene a Im F. Inoltre Im F contiene almeno il vettore nullo, perché $0 = F(0)$. Dunque Im F è un sottospazio di W.

Esercizio 2.6 a) Basta osservare che W è il nucleo dell'applicazione lineare $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{F} \mathbb{R}$, $F(x, y, z) = x + 2y + 3z$. b) W è un piano per l'origine, una sua base è formata da due vettori $w_1, w_2 \in W$ linearmente indipendenti, per esempio $v_1 = (1, 1, -1)$, $v_2 = (-2, 1, 0)$.

Esercizio 2.7 Per ogni $v = xe_1 + ye_2$ di $\mathbb{R}^2$ si ha:

$G(v) = G(xe_1 + ye_2) = xG(e_1) + yG(e_2) = x(-2, 1) + y(4, 1) = (-2x + 4y, x + y)$. Quindi,

$(G \circ F)(e_1) = G(F(e_1)) = G(1, 2) = (6, 3)$ e $(G \circ F)(e_2) = G(F(e_2)) = G(-1, 3) = (14, 2)$.

$\mathcal{M}(G \circ F) = \begin{vmatrix} 6 & 14 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$, $\mathcal{M}(G) = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\mathcal{M}(F) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$. È immediato verificare che $\mathcal{M}(G \circ F) = \mathcal{M}(G) \cdot \mathcal{M}(F)$.

Esercizio 2.8 $\mathcal{M}(G) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$, $\mathcal{M}(F) = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$. Pertanto

$$\mathcal{M}(G \circ F) = \mathcal{M}(G) \cdot \mathcal{M}(F) = \begin{vmatrix} 6 & -15 \end{vmatrix}$$

e $(G \circ F)(x, y) = 6x - 15y$.

Esercizio 2.9 Per ogni $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ con $A, B \in M(n \times n, \mathbb{R})$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha:

$$tr(A + B) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = trA + trB$$

$$tr(\lambda A) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda a_{ii}) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \lambda trA$$

Esercizio 2.10 Sia $e_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$, $e_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$, $e_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Un qualunque vettore $X = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$ si scrive in modo *unico* come combinazione lineare dei vettori che formano tale base, cioè $X = xe_1 + ye_2 + ze_3$. Si ha

$$\begin{aligned}
F(x,y,z) &= F(xe_1 + ye_2 + ze_3) \\
&= xF(e_1) + yF(e_2) + zF(e_3) \quad (F \text{ è lineare}) \\
&= x\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} \quad (\text{valgono le } (2.1)) \\
&= \begin{vmatrix} x+y+z \\ x+2z \end{vmatrix} \quad (\text{somma di matrici e moltiplicazione di una matrice per uno scalare}) \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \quad (\text{prodotto di matrici})
\end{aligned}$$

Quindi, l'unica applicazione lineare che soddisfa le (2.1) è $F(X) = AX$, per ogni $X \in \mathbb{R}^3$. Fissata una base in $\mathbb{R}^n$ e una in $\mathbb{R}^m$ esiste un'unica applicazione lineare $\mathbb{R}^n \xrightarrow{F} \mathbb{R}^m$ che manda e_1 in $F(e_1)$, e_2 in $F(e_2)$, ... , e_n in $F(e_n)$. Essa è rappresentata dalla matrice avente come prima colonna le componenti di $F(e_1)$, come seconda colonna le componenti di $F(e_2)$, ... come n-esima colonna le componenti di $F(e_n)$.

Esercizio 2.11

1. Alla matrice A è associata l'applicazione lineare

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{L_A} \mathbb{R}^2, \quad L_A(X) = AX$$

per ogni $X \in \mathbb{R}^3$. Quindi,

$$L_A(X) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x+z \\ x+3y-z \end{vmatrix}$$

2. Il $KerL_A$ è costituito dal sottospazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$AX = 0$$

Le soluzioni di tale sistema sono $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid t(1,-1,-2) \quad \forall t \in \mathbb{R}\}$ Im L_A è lo spazio generato dalle colonne di A, pertanto Im $L_A = \mathbb{R}^2$

3. $\dim \mathrm{Ker}\ L_A = 1$, $\dim \mathrm{Im}\ L_A = 2$

Esercizio 2.12 $\quad \mathcal{M}(F) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

Esercizio 2.13 $\mathcal{M}(G \circ F) = \begin{vmatrix} 6 & -15 \end{vmatrix}$. $(G \circ F)(x, y) = 6x - 15y$.

Esercizio 2.14 Le affermazioni sono entrambe false perché il prodotto di matrici non è commutativo. Trovare due matrici A e B di tipo (2×2) per le quali $AB \neq BA$.

Esercizio 2.15 Per dimostrare che la funzione 'traccia ' è lineare occorre verificare che

a) $tr(A + B) = trA + trB$

b) $tr(\lambda A) = \lambda trA$

per ogni $A, B \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R})$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. (La verifica è immediata).

1. L'applicazione 'traccia' $M(n \times n, \mathbb{R}) \xrightarrow{tr} \mathbb{R}$ è suriettiva, infatti Im tr è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}$ e quindi Im $tr = \{0\}$ oppure Im $tr = \mathbb{R}$. Poiché esistono matrici con traccia diversa da zero deve essere Im $tr = \mathbb{R}$ e dunque $\dim \mathrm{Im}\ tr = 1$. Dal teorema 'nullità + rango ' si ottiene

$$\underbrace{\dim \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R})}_{n^2} = \dim \mathrm{Ker}\ tr + \underbrace{\dim \mathrm{Im}\ tr}_{1}$$

Quindi $\dim \mathrm{Ker}\ tr = n^2 - 1$.

Esercizio 2.16

$$L_A \text{ è suriettiva } \Leftrightarrow L_A \text{ è iniettiva } \Leftrightarrow \ker L_A = \{0\}$$

Quindi L_A è suriettiva (e iniettiva) se e solo se $X = 0$ è l'unica soluzione del sistema lineare omogeneo $AX = 0$. Riducendo a scala la matrice A si ottiene

$$A \sim \begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & k + \frac{3}{2} \end{vmatrix}$$

Quindi

$$Sol(A; 0) = \{0\} \Leftrightarrow k \neq -\tfrac{3}{2}$$

Quindi, per $k \neq -\frac{3}{2}$, $\ker L_A = \{0\}$ e Im $L_A = \mathbb{R}^3$. La base del nucleo è l'insieme vuoto, mentre una base dell'immagine di L_A è costituita, per esempio, dalla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Infine, per $k = -\frac{3}{2}$ si ha: $\ker L_A = \{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)t \;\; t \in \mathbb{R}\}$, $\dim \ker L_A = 1$. Una base di $\ker L_A$ è per esempio costituita dal vettore $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$.

La dimensione di Im L_A è 2 (teorema nullità + rango). Una base di Im L_A è costituita, per esempio, dalle prime due colonne di A, cioè $(1, -2, 1), (5, 8, 4)$.

Esercizio 2.17

1. Una base di Im F è $(1,0,2)$.

2. Una base di $\ker F$ è $(1,1)$.

3. La matrice che rappresenta l'applicazione $G \circ F$ è

$$M_{\mathcal{C}_3}^{\mathcal{C}_2}(G \circ F) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Esercizio 2.18 Le uguaglianze che esprimono i vettori della base $\mathcal{B}'$ rispetto a quelli della base $\mathcal{B}$ sono

$$\begin{cases} e_1' &= e_1 + 3e_2 \\ e_2' &= -e_1 - e_2 \end{cases} \tag{2.2}$$

Da (2.2), esprimendo e_1, e_2 in funzione di e_1', e_2', si ottengono le uguaglianze che esprimono i vettori della base $\mathcal{B}$ rispetto a quelli della base $\mathcal{B}'$, ossia

$$\begin{cases} e_1 &= -\frac{1}{2}e_1' - \frac{3}{2}e_2' \\ e_2 &= +\frac{1}{2}e_1' + \frac{1}{2}e_2' \end{cases} \tag{2.3}$$

Le due matrici del *cambiamento di base* sono

$$P = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

Se $X = \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ e $X' = \begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix}$ indicano rispettivamente le $\mathcal{B}-$coordinate e le $\mathcal{B}'-$coordinate di un qualsiasi vettore v di $\mathbb{R}^2$ si ha

$$X = PX', \qquad X' = P^{-1}X$$

Posto $X = \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \end{vmatrix}$ si ottiene

$$X' = P^{-1}X = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{7}{2} \end{vmatrix}$$

Si poteva arrivare alle stesse conclusioni in modo più rapido (e meno istruttivo) sostituendo in

$$v = 2e_1 - e_2 \tag{2.4}$$

le uguaglianze (2.3):

$$\begin{aligned} v &= 2e_1 - e_2 \\ &= 2(-\tfrac{1}{2}e'_1 - \tfrac{3}{2}e'_2) - (+\tfrac{1}{2}e'_1 + \tfrac{1}{2}e'_2) \\ &= -\tfrac{3}{2}e'_1 - \tfrac{7}{2}e'_2 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Esercizio 2.19 Le uguaglianze che esprimono i vettori della base $\mathcal{B}'$ rispetto a quelli della base canonica $\mathcal{B}$ sono

$$\begin{cases} e'_1 &= e_1 + e_2 \\ e'_2 &= -e_1 + e_2 \\ e'_3 &= e_3 \end{cases} \tag{2.6}$$

Da (2.6), esprimendo e_1, e_2, e_3 in termini di e'_1, e'_2, e'_3, si ottiene

$$\begin{cases} e_1 &= \frac{1}{2}e'_1 - \frac{1}{2}e'_2 \\ e_2 &= \frac{1}{2}e'_1 + \frac{1}{2}e'_2 \\ e_3 &= e'_3 \end{cases} \tag{2.7}$$

Le matrici del *cambiamento di base* sono

$$P = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Dall'uguaglianza $X' = P^{-1}X$ si ottiene

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{vmatrix}$$

Esercizio 2.20 Per trovare la matrice $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(S)$ basta osservare che $S(e_1) = e_2$ e $S(e_2) = e_1$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Il testo dell'esercizio fornisce le uguaglianze che esprimono i vettori della base $\mathcal{B}'$ rispetto a quelli della base canonica $\mathcal{B}$, ossia

$$\begin{cases} e'_1 &= e_1 + e_2 \\ e'_2 &= e_1 - e_2 \end{cases} \tag{2.8}$$

Da (2.8), esprimendo e_1, e_2 in funzione di e'_1, e'_2 si ottiene:

$$\begin{cases} e_1 &= \frac{1}{2}e'_1 + \frac{1}{2}e'_2 \\ e_2 &= \frac{1}{2}e'_1 - \frac{1}{2}e'_2 \end{cases} \tag{2.9}$$

Pertanto le due matrici del cambiamento di base sono

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

Posto $A' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(S)$ si ottiene

$$A' = P^{-1}AP = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Esercizio 2.21

1. Per trovare, ad esempio, la prima colonna di $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$ occorre scrivere $F(e_1)$ come combinazione lineare di e_1, e_2, e_3:

$$F(e_1) = e_1 + e_2 + 0 \cdot e_3 :$$

la prima colonna è costituita dai coefficienti:

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Allo stesso modo si trovano le altre colonne:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Si ricava

$$e_1 = e'_2 + e'_3, \quad e_2 = e'_3, \quad e_3 = e'_1.$$

Quindi

$$\begin{aligned} &F(e'_1) = F(e_3) = 0 \\ &F(e'_2) = F(e_1 - e_2) = F(e_1) - F(e_2) = e_1 + e_2 - e_3 = -e'_1 + e'_2 + 2e'_3 \\ &F(e'_3) = F(e_2) = e_3 = e'_1. \end{aligned}$$

Segue che

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(F) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

3. Poiché $v = e'_1 + e'_3 = e_3 + e_2$, si ha $[v]_{\mathcal{B}} = (0, 1, 1)$.

3 Sistemi lineari. Riduzione a scala.

Esercizio 3.1 (Sistemi lineari. Interpretazione per righe.)**.** *Si consideri il sistema lineare*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 3 \\ x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 3x & + & 6y & - & 3z & = & 9 \end{array}\right.$$

1. *Interpretare geometricamente ogni singola equazione.*
2. *Che cosa significa "risolvere" il sistema lineare? Senza eseguire calcoli descrivere geometricamente l'insieme delle soluzioni del sistema.*
3. *Trovare le soluzioni del sistema.*

R

Esercizio 3.2. *Descrivere i possibili insiemi* $Sol(A, b)$ *del sistema lineare*

$$AX = b$$

di 3 *equazioni e* 3 *incognite.*

R

Esercizio 3.3. *Interpretare 'per colonne' il sistema lineare*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 3 \\ x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 3x & + & 6y & - & 3z & = & 9 \end{array}\right.$$

Che cosa significa "risolvere" il sistema lineare?

R

Esercizio 3.4. *Sia* A *una matrice* $(n \times n)$ *a coefficienti in* $\mathbb{R}$*. Se* b *è una colonna di* A*, il sistema* $AX = b$ *è risolubile? Spiegare.*

R

Esercizio 3.5. *Utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss, risolvere i seguenti sistemi lineari:*

1. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 2 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \end{array}\right.$$

2. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 4x_1 & - & 6x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 3 \\ 6x_1 & - & 9x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 4 \end{array}\right.$$

3. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & & + & \frac{1}{2}x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

4. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 10 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 12 \\ 4x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 26 \end{array}\right.$$

R

Esercizio 3.6. *Siano*

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \qquad\qquad b = \begin{vmatrix} 2 \\ -3 \\ k \end{vmatrix}$$

1. *Trovare una base di $Sol(A, 0)$.*
2. *Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema $Ax = b$ è risolubile.*

R

Esercizio 3.7. *Si consideri il sistema lineare (di una sola equazione e tre incognite)*

$$2x - y + 3z = 2 \tag{3.1}$$

a) *Trovare una soluzione particolare del sistema lineare.*

b) *Determinare lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato a (3.1) e la sua dimensione.*

c) *Determinare l'insieme di tutte le soluzioni del sistema (3.1) e interpretare geometricamente tale insieme.*

R

Esercizio 3.8. *Si consideri il sistema lineare $AX = b$ così definito*

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x \qquad\quad - z = 2 \end{cases} \tag{3.2}$$

Verificare che le soluzioni $Sol(A; b)$ del sistema lineare sono del tipo

$$Sol(A; b) = X_0 + Y$$

dove X_0 è una soluzione particolare di $AX = b$ e Y è una qualunque soluzione del sistema lineare omogeneo associato $AX = 0$.

R

Esercizio 3.9. *Sia $AX = b$ un sistema lineare risolubile di m equazioni e n incognite. Dimostrare che l'insieme $Sol(A, b)$ delle soluzioni è dato da*

$$Sol(A, b) = Sol(A, 0) + X_0$$

dove $Sol(A, 0)$ indica l'insieme soluzione del sistema lineare omogeneo $AX = 0$, mentre X_0 è una soluzione particolare di $AX = b$

R

Esercizio 3.10. *Sia $AX = b$ un sistema lineare risolubile di m equazioni e n incognite. Dimostrare che la dimensione dello spazio delle soluzioni è*

$$\dim Sol(A,b) = \textit{numero delle incognite} - \textit{rango di } A$$

R

Esercizio 3.11. *Si considerino i seguenti tre vettori di $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (-1,2,0), v_2 = (1,3,5), v_3 = (1,-3,1)$. Determinare la dimensione e una base dello spazio vettoriale $L(v_1,v_2,v_3)$ generato dai vettori v_1,v_2,v_3.*

R

Esercizio 3.12. *Siano $v_1 = (2,5,1,3)$, $v_2 = (0,2,7,9)$, $v_3 = (2,3,0,4)$, $v_4 = (4,10,8,16)$ quattro vettori di $\mathbb{R}^4$. Determinare una base dello spazio vettoriale $L(v_1,v_2,v_3,v_4)$ generato dai vettori v_1,v_2,v_3,v_4.*

R

Esercizio 3.13. *Sia $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare*

$$T(x,y,z) = (x-2y, y+2z, 2x-3y+2z)$$

per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

1. *Trovare una base del nucleo $\ker T$ dell'operatore T.*
2. *Trovare una base dell'immagine $\operatorname{Im} T$ dell'opereatore T.*

R

Esercizio 3.14 (Politecnico di Milano, Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione. Analisi e Geometria 2. 13 febbraio 2014)**.**

Sia $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita dall'uguaglianza

$$T(x,y,z,w) = (x+2y+3z+4w, 2x+3y+4z+5w, 3x+5y+7z+9w).$$

a) *Determinare la dimensione dell'immagine di T , una base per il nucleo di T e una base per l'immagine di T.*

b) *Per quali valori di a il vettore $(5,6,a)$ appartiene all'immagine di T? Per tali valori determinare tutti i vettori $v = (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$ tali che $T(v) = (5,6,a)$.*

R

Esercizio 3.15. *Utilizzando "il metodo di riduzione a scala*[2] *", calcolare il determinante della matrice*

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

R

Esercizio 3.16. *Verificare che la matrice* $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ *è invertibile e determinare la matrice inversa* A^{-1} *utilizzando l'algoritmo di "Gauss-Jordan".*

R

3.1 Soluzioni

Esercizio 3.1

1. Ogni equazione del sistema è l'equazione di un piano in $\mathbb{R}^3$
2. Risolvere il sistema lineare significa trovare i punti (x, y, z) di $\mathbb{R}^3$ comuni ai tre piani. Le prime due equazioni sono linearmente indipendenti mentre la terza equazione è multipla (secondo il fattore 3) della prima. Quindi le soluzioni del sistema sono tutti e soli i punti della retta r intersezione dei piani π_1, π_2 di equazione (nell'ordine) $x+2y-z=3$, $x-y+2z=0$.
3. Il sistema lineare

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

fornisce le equazioni cartesiane della retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$. In definitiva risolvere il sistema lineare (3.3) significa trovare equazioni parametriche per la retta r. Posto ad esempio $z = t$ $(t \in \mathbb{R})$, si ottiene

$$\begin{cases} x = 1-t \\ y = 1+t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

[2] *Sviluppo di Laplace e 'metodo di riduzione a scala' : efficienza degli algoritmi per il calcolo del determinante.* Per calcolare il determinante di una matrice A di tipo $(n \times n)$ con lo *sviluppo di Laplace* sono necessarie più di $n!$ moltiplicazioni (divisioni) mentre con il metodo di riduzione a scala ne servono circa $\frac{n^3+2n-3}{3}$. Pertanto, nel caso di una matrice (25×25) (considerata 'piccola' in molte applicazioni attuali) servono con lo sviluppo di Laplace circa $25! \sim 1.5\ 10^{25}$ moltiplicazioni (divisioni) mentre ne bastano 5.300 con il secondo algoritmo. Ciò significa che se un calcolatore potesse eseguire un trilione (= mille milardi) di moltiplicazioni (divisioni) al secondo, un programma per il calcolo del determinante implementato con il metodo di Laplace sarebbe in grado di fornire una risposta solo dopo 500.000 anni mentre un medesimo programma che utilizzi il metodo di riduzione a scala fornirebbe la soluzione in una frazione di secondo. A tal proposito si veda David C. Lay - *Linear Algebra and its applications*, Addison-Wesley Publishing Company (1994).

Esercizio 3.2 $Sol(A,b)$ sono i sottospazi affini di $\mathbb{R}^3$, cioè :

- l'insieme vuoto $\emptyset$;
- un qualunque punto di $\mathbb{R}^3$;
- le rette di $\mathbb{R}^3$;
- i piani di $\mathbb{R}^3$;
- lo spazio $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3.3 Un qualsiasi sistema lineare si scrive in forma matriciale nella forma

$$AX = b$$

dove A è la *matrice dei coefficienti* del sistema e b è il *vettore colonna dei termini noti*. In questo caso si ottiene

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \\ 9 \end{vmatrix}$$

Interpretazione 'per colonne' del sistema lineare $AX = b$

$$x \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \\ 9 \end{vmatrix}$$

Risolvere il sistema lineare $AX = b$ significa trovare tutte e sole le combinazioni lineari delle tre colonne di A che forniscono il vettore colonna b dei termini noti.

Esercizio 3.4 Il sistema è risolubile. Esiste infatti almeno una combinazione lineare delle colonne di A che fornisce il vettore b (Quale?).

Esercizio 3.5 Sia $AX = b$ uno qualunque dei sistemi proposti. Utilizzando solamente 'operazioni elementari sulle righe' trasformare la matrice $|A, b|$ (matrice completa del sistema) nella *matrice a scala* $|A', b'|$.

1. La terza riga di $|A', b'|$ è del tipo $|0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ h|$, $h \neq 0$. Il sistema non ammette soluzioni.

2. La seconda e la terza riga di $|A', b'|$ sono costituite esclusivamente da zeri. Il sistema ammette infinite soluzioni dipendenti da due parametri reali:

$$Sol(A,b) = \{(\frac{7}{10}, 0, 0, 0) + (-\frac{1}{10}, 0, \frac{4}{5}, 1)t + (\frac{3}{2}, 1, 0, 0)s \quad t, s \in \mathbb{R}\}$$

3. La terza riga di $|A', b'|$ è costituita esclusivamente da zeri. Il sistema ammette infinite soluzioni dipendenti da un parametro reale:

$$Sol(A,b) = \{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)t, \quad t \in \mathbb{R}\}$$

4. Un sistema ammette l'unica soluzione $x_1 = 4$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$.

Esercizio 3.6

1. Una riduzione a scala della matrice A è

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

   Le soluzioni del sistema lineare omogeneo $Ax = 0$ sono

$$Sol(A, 0) = \{(3t, t, 0),\ t \in \mathbb{R}\}$$

   Una base di $Sol(A, 0)$ è costituita dal vettore $(3, 1, 0)$

2. Per studiare la risolubilità del sistema $Ax = b$, si riduca a scala (per righe) la matrice $A' = (A, b)$ ottenuta aggiungendo ad A la colonna b. Si ottiene

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4+k \end{vmatrix}$$

   L'ultima riga della matrice così ottenuta corrisponde all'equazione

$$0\,x + 0\,y + 0\,z = 4 + k$$

   che ha soluzioni se e solo se $k = -4$. Se $k = -4$ il sistema assegnato è equivalente a

$$\begin{cases} x - 3y - 2z = -3 \\ -z = 2 \end{cases}$$

   che non ndipende da k e ha soluzioni. Pertanto il sistema ha soluzioni esattamente quando $k = -4$

Esercizio 3.7

a) Una soluzione particolare del sistema lineare non omogeneo è $X_0 = (1, 0, 0)$

b) Il rango della matrice A dei coefficienti del sistema è 1, quindi $\dim Sol(A, 0) = 1$. Una soluzione di $AX = 0$ è $(\frac{1}{2}, \frac{7}{4}, 1)$, quindi lo spazio $Sol(A, 0)$ è la retta per l'origine di equazioni parametriche $(x, y, z) = (\frac{1}{2}, \frac{7}{4}, 1)t$, $t \in \mathbb{R}$.

c) $Sol(A, b) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) = (1, 0, 0) + (\frac{1}{2}, \frac{7}{4}, 1)t,\ t \in \mathbb{R}\}$. È la retta che contiene il punto $(1, 0, 0)$ e ha vettore di direzione $v = (\frac{1}{2}, \frac{7}{4}, 1)$.

Esercizio 3.8 $\quad Sol(A;b) = \left\{(1,0,0) + t(\frac{1}{2}, \frac{7}{4}, 1)\ t \in \mathbb{R}\right\}$.

È immediato verificare che $X_0 = (1,0,0) \in Sol(A;b)$ e $\left\{t(\frac{1}{2}, \frac{7}{4}, 1)\ t \in \mathbb{R}\right\} = Sol(A;0)$.

Esercizio 3.9 $\quad [Sol(A,0) + X_0 \subseteq Sol(A,b)]$. Se $Y \in Sol(A,0)$ si ha $A(Y + X_0) = AY + AX_0 = 0 + b$ e quindi $Y + X_0 \in Sol(A,b)$.

$[Sol(A,b) \subseteq Sol(A,0) + X_0]$. Se $X \in Sol(A,b)$ si ha $A(X - X_0) = AX - AX_0 = b - b = 0$ e quindi $X = (X - X_0) + X_0$ si scrive come somma di $X - X_0 \in Sol(A,0)$ e X_0.

Esercizio 3.10 Per il teorema “nullità + rango” si ha:

$$\begin{array}{rcccl} \text{numero delle incognite} & = & \dim \operatorname{Ker} A & + & \dim \operatorname{Im} A \\ & = & \dim Sol(A,0) & + & \text{rango di } A \end{array}$$

Poichè $\dim Sol(A,b) = \dim Sol(A,0)$ si ha la tesi.

Esercizio 3.11 Riducendo a scala la matrice avente per righe le componenti di v_1, v_2, v_3 si ottiene

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = A'$$

Valgono le seguenti due proposizioni

1. *Lo spazio delle righe di A coincide con lo spazio delle righe di A'.*
2. *Le righe non nulle di A' formano una base dello spazio delle righe di A.*

Esercizio 3.12 Si consideri la matrice A le cui righe sono le componenti dei vettori v_1, v_2, v_3, v_4. Riducendo a scala la matrice A si ottiene

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 9 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & 10 & 8 & 16 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 9 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 4 & 10 & 8 & 16 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 6 & 10 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = A'$$

Poiché lo spazio vettoriale generato dalle righe di A coincide con lo spazio vettoriale generato dalle righe di A', si ha $\dim L(v_1, v_2, v_3, v_4) = 3$. Inoltre, si verifichi che i vettori v_1, v_2, v_3 costituiscono una base di $L(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

Esercizio 3.13 1. La matrice che rappresenta l'endomorfismo T rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

Per trovare una base di $\ker T$ occorre risolvere il sistema omogeneo $AX = 0$. La riduzione a scala

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

fornisce il sistema equivalente

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

Una base di $\ker T$ è il vettore $(-4, -2, 1)$.

2. Poichè $\dim \ker T = 1$, da $\dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = 3$ (teorema 'nullità più rango') si ricava $\dim \operatorname{Im} T = 2$. Il sottospazio $\operatorname{Im} T$ è generato dalle colonne della matrice A; quindi una base di $\operatorname{Im} T$ è costituita da due qualunque colonne linearmente indipendenti di tale matrice. Per esempio, una base di $\operatorname{Im} T$ è

$$(1, 0, 2), (0, 2, 2)$$

Esercizio 3.14

(a) La matrice che rappresenta T è $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$. La dimensione dell'immagine di T è uguale al rango di A. Riducendo a scala la matrice A si ottiene:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = A'$$

Quindi (si ricordi che il rango per righe è uguale al rango per colonne)

$$\operatorname{rk} A = \dim \operatorname{Im} T = 2$$

La stessa conclusione si poteva ottenere più velocemente osservando che la terza riga di A è somma delle prime due.

Il nucleo di T è il sottospazio $Sol(A; 0)$, cioè il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ costituito dai vettori (x, y, z, w) che sono soluzione del sistema lineare omogeneo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \tag{3.4}$$

Il sistema (3.4) è equivalente a

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w & = 0 \\ \qquad y + 2z + 3w & = 0 \end{cases}$$

Segue che

$$Sol(A;0) = \{(1,-2,1,0)u + (2,-3,0,1)t \ \ t,u \in \mathbb{R}\}$$

I due vettori $(1,-2,1,0)$, $(2,-3,0,1)$ formano una base del nucleo. Infine, ricordando che $\mathrm{Im}\,T$ è generata dalle colonne di A, una base dell'immagine è formata da due colonne linearmente indipendenti di A, per esempio dai vettori $(1,2,3)$ e $(2,3,5)$

(b) Il vettore $(5,6,a)$ appartiene all'immagine di T se e solo se il sistema

$$AX = \begin{vmatrix} 5 \\ 6 \\ a \end{vmatrix}$$

è risolubile, cioè se e solo se la matrice completa del sistema ha rango 2. Riducendo a scala si ottiene

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & a \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & a-15 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-11 \end{vmatrix}$$

Il sistema è risolubile se e solo se $a = 11$. I vettori $\mathbf{v} = (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$ per i quali $T(\mathbf{v}) = (5,6,11)$ sono tutti e soli i vettori soluzione del sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w & = 5 \\ \qquad y + 2z + 3w & = 4 \end{cases}$$

cioè $(u + 2t - 3, -2u - 3t, u, t)$ con $t, u \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3.15 Un modo di calcolare il determinante di una matrice A consiste nel trasformarla, mediante operazioni elementari sulle righe, in una matrice A' ridotta a scala, tenendo però conto dell'effetto che queste operazioni hanno sul determinante:

1. se si moltiplica una riga per un numero $\lambda \neq 0$ il determinante viene moltiplicato per λ;
2. se si somma alla riga i-esima un multiplo della riga j-esima $(i \neq j)$, il determinante non cambia;
3. se si scambiano di posto due righe il determinante cambia di segno.

Pertanto $\det A$ coincide con $\det A'$ a meno di una costante moltiplicativa. Verificare infine (esercizio) che il determinante di una qualsiasi matrice a scala è dato dal prodotto degli elementi della sua diagonale principale.

Esercizio 3.16 Per trovare l'inversa di A si può procedere nel seguente modo (algoritmo di Gauss-Jordan): si accosta alla matrice (invertibile) A la matrice identità I e si effettua una doppia riduzione a scala in modo da trasformare la matrice $A|I$ nella matrice $I|B$. La matrice B è l'inversa di A. Nel caso dell'esercizio proposto si ottiene

$$
\begin{aligned}
A|I \quad &= \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \qquad \sim \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \\
&\sim \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right| \quad \sim \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right| \\
&\sim \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right| \sim \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right| = I|B
\end{aligned}
$$

Quindi $A^{-1} = B = \left|\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right|$

4 Determinanti

Esercizio 4.1 (Vero o Falso?). *Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false, motivando le risposte.*

1. *Se A e B sono due matrici di tipo $n \times n$ allora* $\det(A + B) = \det A + \det B$.
2. *Se A è una qualunque matrice di tipo $n \times n$ e sia λ è un numero qualunque, allora* $\det \lambda A = \lambda \det A$.
3. *Se A è una qualunque matrice di tipo $n \times n$ allora* $\det(-A) = -\det A$.
4. *Se A, P sono matrici di tipo $n \times n$ e P è invertibile, allora* $\det P^{-1}AP = \det A$.

R

Esercizio 4.2. *Trovare l'area del triangolo di vertici $P = (1, 2)$, $Q = (9, 3)$, $R = (6, 6)$.*

R

Esercizio 4.3. *Spiegare geometricamente perché il determinante della matrice*

$$\begin{vmatrix} a & c \\ 0 & b \end{vmatrix}$$

non dipende da c.

R

Esercizio 4.4. *Trovare il volume del parallelepipedo di spigoli*

1. $P = (-1, 0, 2)$, $Q = (1, 3, 1)$, $R = (1, 1, 0)$.
2. $U = (3, 0, 2), V = (0, 1, 1), W = (0, 1, -5)$.

R

Esercizio 4.5. *Determinare l'equazione cartesiana del piano che contiene i punti $A(1, 0, 1)$, $B(0, 2, 1)$, $C(1, 1, 0)$.*

R

Esercizio 4.6. *Dire se i vettori $A(1, 1, 1)$, $B(0, 3, -1)$, $C(1, 4, 0)$ sono linearmente indipendenti.*

R

Esercizio 4.7. *Stabilire per quali valori del parametro k i vettori* $(1,0,2),(1,k,-1),(k,0,3)$ *sono linearmente dipendenti.*

R

Esercizio 4.8. *Dimostrare che se la matrice quadrata A è invertibile, allora*

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

R

Esercizio 4.9. *Dimostrare che l'area della regione del piano racchiusa dall'ellisse di equazione*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

è πab.

R

4.1 Soluzioni.

Esercizio 4.1 1. Falso; 2. Falso; 3. Falso; 4. Vero.

Esercizio 4.2 $Area = \frac{1}{2}|\det \begin{vmatrix} Q-P \\ R-P \end{vmatrix}| = 27/2$

Esercizio 4.3

Esercizio 4.4 1. $Volume = |P\cdot(Q\times R)| = |\det \begin{vmatrix} P \\ Q \\ R \end{vmatrix}| = |\det \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}| = 3$

Esercizio 4.5 $\det \begin{vmatrix} X-A \\ B-A \\ C-A \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$, cioè $2x+y+z-3=0$

Esercizio 4.6 $\det \begin{vmatrix} A \\ B \\ C \end{vmatrix} = 0$ pertanto i vettori sono linearmente dipendenti.

Esercizio 4.7

Esercizio 4.8

Esercizio 4.9

5 Spazi vettoriali euclidei

Esercizio 5.1. *Siano* $X = (x_1, x_2, x_3)$ *e* $Y = (y_1, y_2, y_3)$ *due vettori di* $\mathbb{R}^3$. *Scrivere:*

a) *il prodotto scalare* $X \cdot Y$*;*

b) *la norma di* X*;*

c) *il coseno dell'angolo tra* X *e* Y *(supponendo* $X, Y \neq 0$*);*

d) *l'espressione della distanza di* X *da* Y*.*

R

Esercizio 5.2. *Quando due vettori* $X = (x_1, x_2, x_3)$ *e* $Y = (y_1, y_2, y_3)$ *di* $\mathbb{R}^3$ *di dicono ortogonali? Stabilire per quali eventuali valori di* $h \in \mathbb{R}$ *i vettori* $(2-h, 1, 2)$ *e* $(-1, 1+h, 3h)$ *sono ortogonali.*

R

Esercizio 5.3. *Scrivere tutti i vettori che sono multipli del vettore* $(1, 1, 1)$ *e che hanno lunghezza 1.*

R

Esercizio 5.4. *Trovare l'angolo individuato dai vettori* $v = (-1, 1, -1, 1)$ *e* $w = (-1, 1, 0, 1)$*.*

R

Esercizio 5.5. *Sia* V *uno spazio vettoriale euclideo di dimensione* n*. Siano* $v_1, v_2, ..., v_k$ k *(*$k \leq n$*) vettori unitari di* V *a due a due ortogonali tra loro. Dimostrare che* $v_1, v_2, ..., v_k$ *sono linearmente indipendenti.*

R

Esercizio 5.6. *Sia* V *uno spazio vettoriale euclideo di dimensione* n *e sia* $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ *una base ortonormale di* V*. Dimostrare che le coordinate di un qualunque vettore* $v \in V$ *rispetto alla base* $\mathcal{B}$ *sono date dai prodotti scalari* $(v \cdot e_1), ..., (v \cdot e_n)$*, cioè*

$$v = (v \cdot e_1)e_1 + \cdots + (v \cdot e_n)e_n$$

R

Esercizio 5.7. *Utilizzando il metodo di Gram-Schmidt, ortonormalizzare la base di* $\mathbb{R}^3$ *costituita dai vettori* $u = (1, 0, 1)$*,* $v = (0, 0, 1)$*,* $w = (1, 1, 1)$*.*

R

Esercizio 5.8. *Siano* $w_1 = (1, -2, 0, 1)$ *e* $w_2 = (1, 1, 0, 0)$. *Trovare una base ortonormale di* $L(w_1, w_2)$.

R

Esercizio 5.9. *Dimostrare che se* $A \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R})$ *valgono le uguaglianze:*

1) $(AX) \cdot Y = X \cdot (A^t Y)$

2) $AX \cdot AY = X \cdot (A^t A)Y$

per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^n$.

R

Esercizio 5.10. *Sia* $A \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R})$. *Dimostrare che* A *è ortogonale se e solo se*

$$AX \cdot AY = X \cdot Y$$

R

Esercizio 5.11. *Dimostrare la seguente proposizione:*

"se A *e* B *sono matrici ortogonali* $n \times n$ *allora la matrice prodotto* AB *è ortogonale."*

R

5.1 Complemento ortogonale

Esercizio 5.12. *Sia* V *uno spazio vettoriale euclideo e* W *un sottospazio di* V.

1) Scrivere la definizione di complemento ortogonale $W^\perp$ *di* W.

2) Dimostrare che $W^\perp$ *è un sottospazio di* V.

R

Esercizio 5.13. *Sia* $L(v)$ *il sottospazio di* $\mathbb{R}^3$ *generato dal vettore* $v = (-1, 4, 2)$. *Trovare equazioni cartesiane per il complemento ortogonale* $L(v)^\perp$. *(Vale a dire, trovare un opportuno sistema lineare omogeneo* $AX = 0$ *tale che lo spazio delle sue soluzioni sia* $L(v)^\perp$*).*

R

Esercizio 5.14. *Siano* $v_1 = (3, 1, -1)$ *e* $v_2 = (-1, 2, 1)$. *Trovare equazioni cartesiane per il complemento ortogonale del sottospazio* $L(v_1, v_2)$ *di* $\mathbb{R}^3$. *(Trovare un opportuno sistema lineare omogeneo* $AX = 0$ *tale che lo spazio delle sue soluzioni sia* $L(v_1, v_2)^\perp$*).*

R

5.2 Applicazioni lineari in spazi euclidei

Esercizio 5.15. *Sia* $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{F} \mathbb{R}^3$ *l'applicazione lineare che rappresenta la proiezione ortogonale nel piano* xy *di* $\mathbb{R}^3$. *Determinare la matrice che rappresenta* F *rispetto alla base canonica di* $\mathbb{R}^3$

R

Esercizio 5.16. *Sia* $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{R_\alpha} \mathbb{R}^2$ *la rotazione attorno all'origine di angolo* α. *Scrivere la matrice* $\mathcal{M}(R_\alpha)$ *che rappresenta la rotazione* R_α *rispetto alla base canonica* $\mathcal{C} = (e_1, e_2)$ *di* $\mathbb{R}^2$.

R

Esercizio 5.17. *Sia* $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{S_\theta} \mathbb{R}^2$ *la simmetria rispetto alla retta* r *passante per l'origine e formante con l'asse* x *un angolo* $\widehat{xr} = \theta$. *Scrivere la matrice* $\mathcal{M}(S_\theta)$ *che rappresenta la simmetria* S_θ *rispetto alla base canonica* $\mathcal{C} = (e_1, e_2)$ *di* $\mathbb{R}^2$.

R

Esercizio 5.18. *Sia* $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{P_x} \mathbb{R}^2$ *la proiezione ortogonale di* $\mathbb{R}^2$ *sull'asse* x *e* $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{R_{\frac{\pi}{2}}} \mathbb{R}^2$ *la rotazione attorno all'origine di un angolo* $\theta = \frac{\pi}{2}$. *Possiamo affermare che* $P_x \circ R_{\frac{\pi}{2}} = R_{\frac{\pi}{2}} \circ P_x$*?. Motivare la risposta.*

R

Esercizio 5.19. *le rotazioni del piano attorno all'origine rispettivamente di angoli* α *e* β. *Determinare* $\mathcal{M}(R_\beta \circ R_\alpha)$.

R

Esercizio 5.20. *Sia* $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{S_\theta} \mathbb{R}^2$ *la simmetria rispetto alla retta* r *passante per l'origine e formante con l'asse* x *un angolo* $\widehat{xr} = \theta$.

1. *Trovare* $\mathcal{M}(S_\theta)$, $\mathcal{M}(S_{\frac{\pi}{12}})$ *e* $\mathcal{M}(S_{\frac{\pi}{3}})$.
2. *Verificare che l'applicazione lineare* $S_{\frac{\pi}{3}} \circ S_{\frac{\pi}{12}}$ *è una rotazione attorno all'origine di angolo* $\dfrac{\pi}{2}$.

R

Esercizio 5.21. *Rispetto alla base canonica di* $\mathbb{R}^3$ *determinare le matrici che rappresentano le seguenti applicazioni lineari:*

1. $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{P} \mathbb{R}^3$, *proiezione ortogonale nel piano* yz *di* $\mathbb{R}^3$.

2. $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{S} \mathbb{R}^3$, *simmetria rispetto al piano* xz *di* $\mathbb{R}^3$.

3. $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{R_O^\alpha} \mathbb{R}^3$, *rotazione attorno all'asse* x *di angolo* $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

$\boxed{R}$

5.3 Matrici di proiezioni ortogonali e di simmetrie ortogonali

Esercizio 5.22. *Sia* W *un piano vettoriale (cioè passante per l'origine) di* $\mathbb{R}^3$. *Sia*

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{P_W} \mathbb{R}^3 \tag{5.1}$$

la proiezione ortogonale su W. *Sia* u *uno dei due vettori unitari ortogonali a* W.

Dimostrare che

$$P_W(v) = v - (v \cdot u)u \tag{5.2}$$

$\boxed{R}$

Esercizio 5.23. *Sia* W *un piano passante per l'origine di* $\mathbb{R}^3$. *La simmetria ortogonale rispetto al piano* W *è l'operatore lineare*

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{S} \mathbb{R}^3 \tag{5.3}$$

che tiene fissi i vettori di W *e manda ogni vettore del complemento ortogonale di* W *nel suo opposto. Sia* u *uno dei due vettori unitari ortogonali a* W.

Dimostrare che

$$S(v) = v - 2(v \cdot u)u \tag{5.4}$$

$\boxed{R}$

Esercizio 5.24. *Sia* W *il piano di equazione* $x - y + z = 0$. *Trovare la matrice* A *che rappresenta la proiezione ortogonale* P_W *rispetto alla base canonica di* $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{R}$

Esercizio 5.25. *Sia* W *il piano di equazione* $x - y + z = 0$. *Trovare la matrice* B *che rappresenta la simmetria ortogonale* S, *rispetto alla base canonica di* $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{R}$

5.4 I quattro sottospazi fondamentali di una matrice

Sia $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ una base di $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_m)$ una base di $\mathbb{R}^m$ e $A = (a_{ij})$ una matrice di tipo $m \times n$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Si osservi la seguente figura[3]:

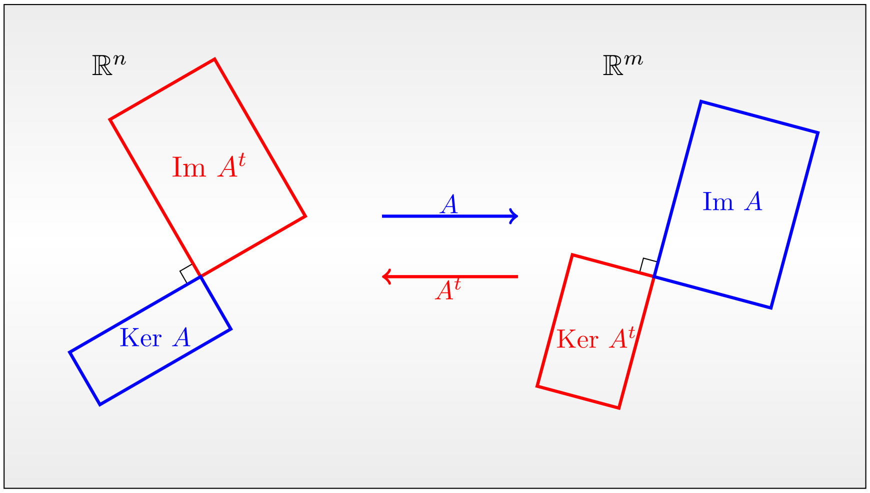

Fig.1 - L'applicazione lineare $\mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^m$ definisce due sottospazi: Ker A e Im A mentre l'applicazione lineare $\mathbb{R}^m \xrightarrow{A^t} \mathbb{R}^n$ definisce Ker A^t e Im A^t.

Essa mostra due applicazione lineari, la prima da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ rappresentata dalla matrice A e la seconda, da $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$, rappresentata da A^t. Queste due applicazioni lineari definiscono i seguenti sottospazi

- $C(A)$ = Spazio delle colonne di A;
- $N(A)$ = Nullità di $A = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = 0\}$;
- $C(A^t)$ = Spazio delle righe di A;
- $N(A^t)$ = Nullità di $A^t = \{Y \in \mathbb{R}^m \mid AY = 0\}$.

Esercizio 5.26. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

e i quattro sottospazi $C(A)$, $N(A)$, $C(A^t)$ e $N(A^t)$ associati alla matrice A. Di quale spazio vettoriale sono sottospazi? Si determini la dimensione di ognuno di essi.

$\boxed{R}$

[3] Per ulteriori approfondimenti si veda *G. Strang - Algebra Lineare, Apogeo, 2004.*

Esercizio 5.27. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

Determinare la dimensione e una base di $C(A)$, $N(A)$, $C(A^t)$ *e* $N(A^t)$.

R

Esercizio 5.28. *Si consideri la matrice* $A \in \mathcal{M}(m \times n, \mathbb{R})$. *Dimostrare che*

a) $C(A^t)$ *è il complemento ortogonale di* $N(A)$*;*

b) $C(A)$ *è il complemento ortogonale di* $N(A^t)$.

R

5.5 Soluzioni

Esercizio 5.1

Esercizio 5.2 X è ortogonale a Y se e solo se $X \cdot Y = 0$. Nel caso proposto

$$X \cdot Y = -2 + h + 1 + h + 6h = 8h - 1$$

Quindi X è ortogonale a Y se e solo se $h = \frac{1}{8}$

Esercizio 5.3 $u_1 = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3},) \qquad u_2 = (-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3},)$.

Esercizio 5.4 Se θ è l'angolo individuato da v e w si ha: $\cos\theta = \dfrac{v \cdot w}{\|v\|\,\|w\|} = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Quindi $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Esercizio 5.5

Esercizio 5.6

Esercizio 5.7

Esercizio 5.8 Per costruire una base *ortogonale* di $L(w_1, w_2)$ si pone (metodo di Gram-Schmidt):

$u_1 = w_1 = (1, -2, 0, 1)$

$u_2 = w_2 - P_{u_1}(w_2) = w_2 - \dfrac{w_2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 = (\dfrac{7}{6}, \dfrac{2}{3}, 0, \dfrac{1}{6})$

(u_1, u_2) è una base ortogonale di $L(w_1, w_2)$. Per ottenere una base *ortonormale* (u'_1, u'_2) basta dividere u_1, u_2 per le rispettive norme: $u'_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 0, 1)$, $u'_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \sqrt{\frac{6}{11}}\,(\frac{7}{6}, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{6})$.

Esercizio 5.9 1) Si ricordi che se P e Q sono due vettori colonna di $\mathbb{R}^n$ si ha: $P \cdot Q = P^t Q$ (dove $P \cdot Q$ il prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^n$ e $P^t Q$ il prodotto (di matrici) della matrice P^t, di tipo $1 \times n$, per la matrice Q, di tipo $n \times 1$). Quindi $AX \cdot Y = (AX)^t Y = (X^t A^t) Y = X^t (A^t Y) = X \cdot A^t Y$.

2) È un'immediata conseguenza del punto precedente.

Esercizio 5.10

Esercizio 5.11 Per definizione, una matrice quadrata Q è ortogonale se $QQ^t = I$. Allora se A, B sono ortogonali si ha

$$(AB)(AB)^t = (AB)(B^t A^t) = A(BB^t)A^t = AA^t = I$$

Segue che la matrice prodotto AB è ortogonale.

Esercizio 5.12

Esercizio 5.13 $L(v)^\perp = \{(x, y, z)) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + 4y + 2z = 0\}$. È il piano passante per l'origine ortogonale a v.

Esercizio 5.14 Il complemento ortogonale di $L(v_1, v_2)$ è espresso da

$$Sol(A, 0) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid AX = 0\}$$

dove A è la matrice avente per righe le componenti dei vettori v_1, v_2. $Sol(A, 0)$ è la retta passante per l'origine ortogonale al piano individuato da v_1 e v_2.

Esercizio 5.15 $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{F} \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (x, y, 0)$ e $\mathcal{M}(F) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

Esercizio 5.16 $\mathcal{M}(R_\alpha) = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

Esercizio 5.17 $\mathcal{M}(S_\theta) = \begin{vmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{vmatrix}$

Esercizio 5.18 $P_x \circ R_{\frac{\pi}{2}} \neq R_{\frac{\pi}{2}} \circ P_x$, basta osservare che $(R_{\frac{\pi}{2}} \circ P_x)(e_1) = e_2$ mentre $(P_x \circ R_{\frac{\pi}{2}})(e_1) = 0$.

Esercizio 5.19 $\mathcal{M}(R_\beta \circ R_\alpha) = \mathcal{M}(R_\beta) \cdot \mathcal{M}(R_\alpha) = \begin{vmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha) \\ \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{vmatrix}$.

Esercizio 5.20

$\mathcal{M}(S_{\frac{\pi}{3}}) = \begin{vmatrix} \cos\frac{2}{3}\pi & \sin\frac{2}{3}\pi \\ \sin\frac{2}{3}\pi & -\cos\frac{2}{3}\pi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$, $\mathcal{M}(S_{\frac{\pi}{12}}) = \begin{vmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & -\cos\frac{\pi}{6} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix}$
e infine $\mathcal{M}(S_{\frac{\pi}{3}} \circ S_{\frac{\pi}{12}}) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$. L'ultima matrice rappresenta la rotazione attorno all'origine di angolo $\frac{\pi}{2}$.

Esercizio 5.21 1. $\mathcal{M}(P) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 2. $\mathcal{M}(S) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

3. $\mathcal{M}(R_o^{\frac{\pi}{3}}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$

Esercizio 5.22 *Suggerimento.* Il vettore $(v \cdot u)u$ è la proiezione ortogonale di v sul complemento ortogonale di W.

Esercizio 5.23 *Suggerimento.* Si osservi che il vettore $\frac{1}{2}(v+S(v))$ è la proiezione ortogonale di v sul piano W:

$$\frac{1}{2}(v + S(v)) = v - (v \cdot u)u$$

Esercizio 5.24 Si utilizzi la formula (5.2):

$$P_W(v) = v - (v \cdot u)u \tag{5.5}$$

Un vettore unitario ortogonale a W è

$$u = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$$

La prima colonna di A è data da:

$$\begin{aligned} P_W(e_1) &= e_1 - (e_1 \cdot u)u \\ &= (1,0,0) - \frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) \\ &= (2/3, 1/3, -1/3) \end{aligned}$$

In modo simile si ottengono le altre due colonne:

$$A = \begin{vmatrix} 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \end{vmatrix}$$

Esercizio 5.25 Si utilizzi la formula (5.4):

$$S(v) = v - 2(v \cdot u)u \tag{5.6}$$

Un vettore unitario ortogonale a W è

$$u = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$$

La prima colonna di B è

$$S(e_1) = e_1 - 2(e_1 \cdot u)u = (1/3, 2/3, -2/3)$$

Le altre due colonne si ottengono in modo analogo.

Esercizio 5.26 $C(A^t)$ (spazio delle righe di A) e $N(A)$ (nullità di A) sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$ mentre $C(A)$ (spazio delle colonne di A) e $N(A^t)$ (nullità di A^t) sono sottospazi di $\mathbb{R}^2$.

Dimensione dei quattro sottospazi. La dimensione dello spazio delle colonne di A è il rango di A, quindi $\dim C(A) = \text{rk } A = 1$. La dimensione dello spazio delle colonne di una matrice è uguale alla dimensione dello spazio delle righe quindi $\dim C(A) = \dim C(A^t) = 1$. Infine, dal teorema "nullità + rango" si ha

$$3 = \dim N(A) + \dim C(A) \quad \text{e} \quad 2 = \dim N(A^t) + \dim C(A^t)$$

Pertanto, $\dim N(A) = 3 - 1 = 2$ e $\dim N(A^t) = 2 - 1 = 1$.

Esercizio 5.27 *Dimensione dei quattro sottospazi.* Si ha $2 = \text{rk } A = \dim C(A) = \dim C(A^t)$. Dal teorema "nullità + rango"

$$4 = \dim N(A) + \dim C(A) \quad \text{e} \quad 3 = \dim N(A^t) + \dim C(A^t)$$

Pertanto, $\dim N(A) = 4 - 2 = 2$ e $\dim N(A^t) = 3 - 2 = 1$.

Basi dei quattro sottospazi. Riducendo a scala la matrice A si ottiene

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 8 & 4 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = A' \tag{5.7}$$

Una base di $C(A^t)$ è formata dalle due righe non nulle di A', cioè dai vettori $(1, 1, 4, 2)$, $(0, 1, -2, -1)$.

Riducendo a scala la matrice A^t si ottiene

$$A^t = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (A^t)' \tag{5.8}$$

Quindi una base di $C(A)$ è formata dalle due righe non nulle di $(A^t)'$, cioè dai vettori $(1, 1, 2)$, $u_2 = (0, 1, 0)$.

Il sottospazio $N(A)$ è formato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo $AX = 0$, ossia

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

Utilizzando la riduzione a scala (5.7) si ricava $N(A) = \{(-6,2,1,0)h + (-3,1,0,1)k \ \text{dove} h, k \in \mathbb{R}\}$; una base di $N(A)$ è formata dai vettori $(-3,1,0,1)$ e $(-6,2,1,0)$.

Il sottospazio $N(A^t)$ è formato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo $A^tY = 0$, ossia

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + 2y_3 = 0 \\ y_1 + 2y_2 + 2y_3 = 0 \\ 4y_1 + 2y_2 + 8y_3 = 0 \\ 2y_1 + y_2 + 4y_3 = 0 \end{cases}$$

Utilizzando la riduzione a scala (5.8) si ricava $N(A^t) = \{(-2,0,1)h \ \text{ dove } h \in \mathbb{R}\}$; una base di $N(A^t)$ è formata dal vettore $(-4,0,1)$.

Esercizio 5.28 a) Il sottospazio $N(A)$ (nullità di A) è formato per definizione da tutti i vettori X di $\mathbb{R}^n$ per i quali $AX = 0$, ossia

$$A_i \cdot X = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

dove $A_i \cdot X$ indica il prodotto scalare di A_i (i-esima riga di A) per il vettore X.

b) Analogo al caso precedente.

6 Diagonalizzazione di matrici sul campo dei reali.

Il problema della diagonalizzazione di matrici si può formulare nel seguente modo

Problema 6.1. *Sia $A = (a_{ij})$ è una matrice quadrata di ordine n a coefficienti reali.*
Esiste una matrice P (a coefficienti reali) invertibile per cui $P^{-1}AP$ è una matrice diagonale*?*

In caso affermativo si dice che *A è diagonalizzabile* e che *P è una matrice diagonalizzante.*

Esercizio 6.2. *Trovare polinomio caratteristico, autovalori e tutti gli autovettori della matrice*

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

La matrice A è diagonalizzabile?

$\boxed{R}$

Esercizio 6.3. *Si consideri l'operatore di $\mathbb{R}^2$ così definito:*

$$F(e_1) = (2,0), \ F(e_2) = (3,4)$$

dove e_1, e_2 sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^2$. L'operatore F è diagonalizzabile? In caso affermativo si trovi l'operatore diagonalizzante e quello diagonale.

R

Diagonalizzazione di matrici. Il caso 2×2.

Si consideri la matrice $A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ a coefficienti reali il cui polinomio caratteristico, eguagliato a zero, è

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (\text{tr } A)\lambda + \det A = 0. \tag{6.1}$$

Se λ_1 e λ_2 sono le radici di 6.1 allora si possono presentare i seguenti casi:

1. Se λ_1, λ_2 sono due radici *reali e distinte* allora A è diagonalizzabile.
2. Se λ_1, λ_2 sono due radici *reali e coincidenti* allora "A è diagonalizzabile se e solo se A è già diagonale".
3. Se λ_1, λ_2 sono due radici *complesse coniugate* allora A non è diagonalizzabile (sui reali).

Esercizio 6.4. *Sia $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{S} \mathbb{R}^3$ la simmetria rispetto al piano π di equazione*

$$x - y + 2z = 0$$

1) *L'operatore S è diagonalizzabile? In caso affermativo trovare una matrice diagonale che rappresenta S.*

2) *Trovare gli autospazi di S.*

3) *Quanto vale* $\det S$*?*

4) *Determinare* $\dim(\text{Im } S)$ *e* $\dim(\text{Ker } S)$.

5) *Qual è la matrice che rappresenta S rispetto alla base canonica?*

R

Esercizio 6.5. *Stabilire se la matrice*

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$?

$\boxed{R}$

Esercizio 6.6. *Dimostrare che gli autovalori di una matrice triangolare (in particolare, di una matrice diagonale) sono i numeri che compaiono sulla diagonale principale.*

$\boxed{R}$

Esercizio 6.7. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

1. *A è diagonalizzabile (sui reali)?*
2. *Trovare una base per ogni autospazio di A.*

$\boxed{R}$

Esercizio 6.8. *Sia* $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{R} \mathbb{R}^3$ *la rotazione attorno all'asse* z *di angolo* $\frac{\pi}{2}$.

1. *Trovare la matrice che rappresenta* R *rispetto alla base canonica di* $\mathbb{R}^3$.
2. *Verificare che gli unici autovettori di* R *sono i vettori che appartengono all'asse di rotazione (asse* z*).*
3. R *è diagonalizzabile (sui reali)? Spiegare.*

$\boxed{R}$

Diagonalizzazione di matrici. Il caso 3×3.

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice 3×3 e

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + (\text{tr } A)\lambda^2 + (\dots)\lambda + \det A = 0. \tag{6.2}$$

il suo polinomio caratteristico, eguagliato a zero.
Se λ_i $(i = 1, 2, 3)$ sono le radici di (6.2) , indichiamo con $m.a.(\lambda_i)$ e $m.g.(\lambda_i)$ rispettivamente la *molteplicità algebrica* e la *molteplicità geometrica* di λ_i. Si dimostra che $m.a.(\lambda_i) \geq m.g.(\lambda_i)$.
Si possono presentare i seguenti casi:

1. Se λ_1, λ_2, λ_3 sono tre radici *reali e distinte* allora A è diagonalizzabile.
2. Se $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$ (cioè , se λ_i sono tre radici reali di cui due coicidenti) allora si ha:
   - se $m.a.(\lambda_2) = m.g.(\lambda_2)$, A è diagonalizzabile.
   - se $m.a.(\lambda_2) > m.g.(\lambda_2)$, A non è diagonalizzabile.
3. Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ (cioè , se λ_i sono tre radici *reali e coincidenti*) allora "A è diagonalizzabile se e solo se A è già diagonale."
4. Se λ_1 è una radice reale e λ_2, λ_3 sono radici complesse coniugate allora A non è diagonalizzabile (sui reali).

6.1 Operatori simmetrici

Esercizio 6.9. *Sia V uno spazio euclideo (cioè V è uno spazio vettoriale con prodotto scalare che qui verrà denotato con "$\cdot$ ") e $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ una base ortonormale di V.*

Verificare che per ogni $v = v_1e_1 + v_2e_2 + \cdots + v_ne_n$ di V si ha:

$$v \cdot e_i = v_i$$

con $i = 1, 2, \dots, n$.

R

Esercizio 6.10. *Sia V uno spazio euclideo. Un operatore*[4] *lineare $V \xrightarrow{L} V$ si dice* simmetrico *o* auto-aggiunto *(rispetto al fissato prodotto scalare) se vale l'uguaglianza*

$$L(v) \cdot w = v \cdot L(w) \tag{6.3}$$

per ogni v, w in V.

[4]Un *operatore* lineare - o, semplicemente, *operatore* - di uno spazio vettoriale V è un'applicazione lineare con dominio e codominio coincidenti con V.

Dimostrare che l'operatore $V \xrightarrow{L} V$ *è simmetrico se e solo se, per ogni base* ortonormale $\mathcal{B}$ *di* V*, la matrice che rappresenta* L *rispetto a* $\mathcal{B}$ *è simmetrica.*

R

Esercizio 6.11. *Sia* $V \xrightarrow{L} V$ *un operatore dello spazio vettoriale euclideo* V *e* $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ *una* base ortonormale *di* V*. Dimostrare la seguente proprietà:*

"se la matrice che rappresenta L *rispetto a* $\mathcal{B}$ *è simmetrica allora la matrice che rappresenta* L *rispetto a qualsiasi base ortonormale* $\mathcal{B}'$ *è simmetrica."*

R

6.2 Diagonalizzazione di matrici simmetriche.

Esercizio 6.12. *Dimostrare che valgono le seguenti uguaglianze*

a) *Per ogni matrice* $A \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R})$

$$(AX) \cdot Y = X \cdot (A^t Y)$$

dove $X, Y \in \mathbb{R}^n$*.*

b) *Per ogni matrice simmetrica* $A \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R})$

$$(AX) \cdot Y = X \cdot (AY)$$

dove $X, Y \in \mathbb{R}^n$*.*

R

Esercizio 6.13. *Dimostrare che se* A *è una martice simmetrica di tipo* $n \times n$ *allora due qualunque autovettori di* A *relativi a autovalori distinti sono ortogonali.*

R

Esercizio 6.14. *Sia* $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{L} \mathbb{R}^2$ *l'endomorfismo rappresentato, rispetto alla base canonica di* $\mathbb{R}^2$*, dalla matrice*

$$A = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{vmatrix}$$

1. *Determinare gli autovalori di* A*.*
2. *Determinare gli autospazi e le relative dimensioni.*
3. *Dire se* A *è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una matrice diagonalizzante.*

R

Esercizio 6.15. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

1. *Determinare gli autovalori di A.*
2. *Determinare le dimensioni degli autospazi.*
3. *Dire se A è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una matrice diagonalizzante.*

R

Esercizio 6.16. *Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ così definito*

$$W = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2z = 0\}$$

1. *Trovare il complemento ortogonale $W^\perp$ di W.*
2. *Ogni vettore $X \in \mathbb{R}^3$ si scrive in modo unico*[5] *nel seguente modo*

   $$X = X_1 + X_2$$

   con $X_1 \in W$ e $X_2 \in W^\perp$. Si considerino le due proiezioni rispettivamente su W e $W^\perp$ così definite

   $$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{P_W} \mathbb{R}^3,\ P_W(X) = X_1 \quad e \quad \mathbb{R}^3 \xrightarrow{P_{W^\perp}} \mathbb{R}^3,\ P_{W^\perp}(X) = X_2$$

   P_W e $P_{W^\perp}$ sono diagonalizzabili? In caso affermativo si trovino le matrici diagonali che rappresentano P_W e $P_{W^\perp}$ rispetto a un'opportuna base ortonormale *preventivamente fissata.*
3. *Trovare le matrici che rappresentano P_W e $P_{W^\perp}$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$*
4. *Determinare* $\dim(\mathrm{Im}\ P_W)$ *e* $\dim(\mathrm{Ker}\ P_{W^\perp})$
5. *Trovare* $\det P_W$ *e* $\det P_{W^\perp}$

R

Esercizio 6.17. *Trovare il polinomio caratteristico, gli autovalori e una base di autovettori delle matrici simmetriche:*

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Verificare che autovettori relativi a autovalori distinti sono ortogonali.

[5] $\mathbb{R}^3$ è somma diretta di W e $W^\perp$, cioè $R^3 = W \oplus W^\perp$

R

Esercizio 6.18. *Sia* $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^2$ *l'operatore di* $\mathbb{R}^2$ *rappresentato, rispetto alla base canonica dalla matrice*

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

a) *Trovare gli autovalori di* T.

b) T *è diagonalizzabile? In caso affermativo, trovare una base* $\mathcal{B}'$ *di* $\mathbb{R}^2$ *costituita da autovettori di* T.

c) *Qual è la matrice* A' *che rappresenta* T *rispetto alla base* $\mathcal{B}'$ *scelta? Interpretare geometricamente* T.

d) *Trovare una matrice* P *tale* $A' = P^{-1}AP$.

R

Esercizio 6.19. [Politecnico di Milano, Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione. Analisi e Geometria 2. 16 febbraio 2010]

a) *Sia* A *una matrice* $m \times n$ *e* A^t *la sua trasposta.*

   A^tA *è una matrice quadrata anche quando* $m \neq n$*?*

   A^tA *è una matrice simmetrica?*

   A^tA *è diagonalizzabile?*

b) *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

   Si calcoli $B = A^tA$ *e si trovi una matrice invertibile* S *e una matrice diagonale* D *per le quali risulta* $S^{-1}BS = D$.

R

Esercizio 6.20. *Sia* $w = (1, 0, 2) \in \mathbb{R}^3$ *e sia* $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{P} \mathbb{R}^3$ *l'operatore lineare che a ogni vettore* $v \in \mathbb{R}^3$ *associa la sua proiezione ortogonale* $P(v)$ *sulla retta* $L(w)$.

1) *Trovare la matrice che rappresenta* P *rispetto alla base canonica di* $\mathbb{R}^3$.

2) *Trovare gli autovalori di* P.

3) *Trovare gli autospazi di* P.

R

6.3 Soluzioni.

Esercizio 6.4

1. Si fissi in $\mathbb{R}^3$ una base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ in modo che v_1, v_2 siano due vettori linearmente indipendenti del piano π e v_3 ortogonale a v_1 e v_2. Si ha: $S(v_1) = v_1$, $S(v_2) = v_2$, $S(v_3) = -v_3$. La matrice $M_{\mathcal{B}'}(S)$ che rappresenta S rispetto alla base (di autovettori) $\mathcal{B}'$ è
$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

2. Gli autovalori di S sono $\lambda = 1$ con molteplicità algebrica m.a.(1)=2 e $\lambda = -1$ con molteplicità algebrica m.a.(-1)=1. L'autospazio V_1 è il piano π di equazione $x - y + 2z = 0$, mentre l'autospazio V_{-1} è la retta passante per O ortogonale a π, cioè $V_{-1} = \{t(1, -1, 2) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

3. $\det S = -1$.

4. $\dim(\text{Im } S) = 3$, $\dim(\text{Ker } S) = 0$.

5. Sia $\mathcal{B}'$ la base di autovettori formata da $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (-2, 0, 1)$, $v_3 = (1, -1, 2)$ e $\mathcal{B}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori e_1, e_2, e_3. La matrice avente per colonne, nell'ordine, le $\mathcal{B}$-coordinate di v_1, v_2, v_3 è la matrice del cambiamento di base, cioè
$$P = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$
Se A indica la matrice che rappresenta S rispetto alla base canonica $\mathcal{B}$ si ha
$$D = P^{-1}AP$$
Quindi
$$A = PDP^{-1}$$

Esercizio 6.5 La matrice A ha un solo autovalore $\lambda = 2$ con molteplicità algebrica $m.a.(2) = 3$. Se A fosse diagonalizzabile, esisterebbe una matrice invertibile P per la quale

$$P^{-1}AP = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2I$$

Ma allora si avrebbe: $A = P(2I)P^{-1} = 2I$, cioè A sarebbe già diagonale, il che nel nostro caso è falso. Quindi, A non è diagonalizzabile nè sui reali nè sui complessi. In generale, *una matrice di ordine n con un autovalore di molteplicità n è diagonalizzabile esattamente quando è già diagonale.*

Esercizio 6.6 Una qualsiasi matrice (3×3) triangolare superiore è del tipo

$$A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix}$$

Gli autovalori di A sono le radici del polinomio caratteristico

$$\det(A - \lambda I) = (a - \lambda)(d - \lambda)(f - \lambda) = 0$$

cioè $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = d$, $\lambda_3 = f$ (i numeri che compaiono sulla diagonale principale di A). La generalizzazione al caso di matrici $(n \times n)$ è immediata.

Esercizio 6.7

a) Il polinomio caratteristico di A è $(1+\lambda)^2(\lambda-7)$. Gli autovalori sono: $\lambda_1 = -1$ (doppio) e $\lambda_2 = 7$. La molteplicità geometrica di $\lambda_1 = -1$ è:

$$\begin{aligned} m.g.(-1) &= \dim\ker\left(A - (-1)I\right) \\ &= 3 - \operatorname{rk} \begin{vmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} \qquad \text{(nullità + rango)} \\ &= 3 - 1 = 2. \end{aligned}$$

Poiché $m.g.(-1) = m.a.(-1)$, la matrice A è diagonalizzabile per similitudine (sui reali).

b) Per definizione, l'autospazio $V_{-1} = \ker\left(A + I\right)$ è il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ costituito dalla soluzioni del sistema omogeneo $(A+I)X = 0$. La matrice $A+I = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ ha rango 1 e il sistema $(A + I)X = 0$ si riduce alla singola equazione $2x + z = 0$. Una base di V_{-1} è :

$$(0, 1, 0),\ (1, 0, -2).$$

Analogamente, l'autospazio $V_7 = \ker\left(A - 7I\right)$ è rappresentato in forma cartesiana dalle equazioni:

$$\begin{cases} -2x + 3z = 0 \\ \qquad -8y = 0 \end{cases} \tag{6.4}$$

Una base di V_7 è una qualunque soluzione non nulla di (6.4). Ad esempio, $(3, 0, 2)$.

Esercizio 6.8

1. La matrice che rappresenta R rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è $A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

2. Gli autovalori di A sono le radici dell'equazione $\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(1 + \lambda^2) = 0$. L'unica soluzione reale di tale equazione è $\lambda_1 = 1$ (il corrispondente autospazio V_1 è l'asse z).

3. R non è diagonalizzabile perchè non esiste una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di R.

Esercizio 6.9 Si ha:

$$\begin{aligned} v \cdot e_i &= (v_1 e_1 + v_2 e_2 + \cdots + v_i e_i + \cdots + v_n e_n) \cdot e_i \\ &= v_1(e_1 \cdot e_i) + v_2(e_1 \cdot e_i) + \cdots + v_i(e_i \cdot e_i) + \cdots + v_n e_n) \cdot e_i \end{aligned}$$

Ma, $e_i \cdot e_j = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$ perchè la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ è ortonormale. Quindi $v \cdot e_i = v_i$.

Esercizio 6.10 ($\Rightarrow$) *Se L è simmetrico, allora la matrice $A = (a_{ij})$ che rappresenta L rispetto alla base ortonormale $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ è simmetrica.*

La colonna j-esima di A è costituita dalle coordinate di $L(e_j)$ rispetto alla base (ortonormale) $\mathcal{B}$. Si ha

$$\begin{aligned} a_{ij} &= i\text{-esima coordinata di } L(e_j) \\ &= L(e_j) \cdot e_i \qquad \text{perché la base } \mathcal{B} \text{ è ortonormale} \\ &= e_j \cdot L(e_i) \qquad \text{perché } L \text{ è simmetrico} \\ &= a_{ji} \end{aligned}$$

Pertanto A è simmetrica.

($\Leftarrow$) *Se la matrice $A = (a_{ij})$ che rappresenta L rispetto a una base ortonormale $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ è simmetrica, allora L è simmetrico.*

Siano $v = \sum_i v_i e_i$ e $w = \sum_j w_j e_j$ (tutte le somme estese da 1 a n) vettori di V. Allora, si ha

$$\begin{aligned} L(v) \cdot w &= L(\textstyle\sum_i v_i e_i) \cdot (\sum_j w_j e_j) \\ &= (v_i \textstyle\sum_i L(e_i)) \cdot (\sum_j w_j e_j) \qquad \text{perchè } L \text{ è lineare} \\ &= v_i w_j \left(\textstyle\sum_{i,j} L(e_i) \cdot e_j\right) \qquad \text{perchè il prodotto scalare è bilineare} \\ &= v_i w_j \textstyle\sum_{i,j} a_{ji} \qquad \text{perché } L(e_i) \cdot e_j = a_{ji} \end{aligned}$$

Con gli stessi conti si avrà $v \cdot T(w) = v_i w_j \sum_{i,j} a_{ij}$. Ma per ipotesi $a_{ij} = a_{ji}$. Dunque $L(v) \cdot w = v \cdot L(w)$ e quindi L è un operatore simmetrico.

Esercizio 6.11 Se A è la matrice che rappresenta L rispetto alla base ortonormale $\mathcal{B}$ l'operatore L si può rappresentare nella forma

$$Y = AX \tag{6.5}$$

Se $\mathcal{B}' = \{v_1', v_2', \dots v_n'\}$ è un'altra base ortonormale di V allora il legame tra le coordinate X e X' di un medesimo vettore di V è espresso dall'uguaglianza $X = PX'$ dove le colonne di P sono le $\mathcal{B}$-coordinate di $v_1', v_2', \dots, v_n'$. La matrice P è ortogonale, cioè $P^{-1} = P^t$.

Da (6.5) si ottiene $PY' = APX'$, quindi

$$Y' = (P^t AP)X'$$

La matrice P^tAP è la matrice che rappresenta L nella base $\mathcal{B}'$; è immediato verificare che essa è simmetrica.

Esercizio 6.12

a) Se $A \in \mathcal{M}(n \times n)$, e $X, Y \in \mathbb{R}^n$ si ha:

$$\begin{aligned} (AX)\cdot Y &= \sum_i (AX)_i Y_i = \sum_i \big(\sum_h A_{ih}X_h\big)Y_i = \sum_{i,h} A_{ih}X_hY_i \\ X\cdot(A^tY) &= \sum_s X_s(A^tY)_s = \sum_s X_s\big(\sum_l (A^t)_{sl}Y_l\big) = \sum_{s,l}(A^t)_{sl}X_sY_l = \sum_{s,l} A_{ls}X_sY_l \end{aligned}$$

b) Se A è simmetrica $A = A^t$; dall'uguaglianza dimostrata al punto a) si ottiene:

$$(AX)\cdot Y = X\cdot(AY)$$

Esercizio 6.13 Siano U e V due autovettori della matrice A relativi agli autovalori λ e μ, con $\lambda \neq \mu$. Dall'uguaglianza $(AU)\cdot V = U\cdot(AV)$ si ottiene:

$$\lambda U\cdot V = U\cdot \mu V$$

ovvero $(\lambda - \mu)(U\cdot V) = 0$. Essendo per ipotesi $\lambda \neq \mu$, segue

$$U\cdot V = 0$$

Quindi U e V sono ortogonali.

Esercizio 6.14

1. Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$.

2. L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = 1$ è $V_1 = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid t(1,1)\ t \in \mathbb{R}\}$, quello relativo a $\lambda_2 = 2$ è $V_2 = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid t(1,-1)\ t \in \mathbb{R}\}$; $\dim V_1 = \dim V_2 = 1$.

3. Si tratta di trovare una matrice invertibile P per la quale risulta

$$P^{-1}AP = D$$

con $D =$ matrice diagonale. La matrice P è una matrice 2×2 che ha per colonne le componenti di due vettori e_1', e_2' formanti una base di autovettori di $\mathbb{R}^2$, cioè $P = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$.

La matrice D è la matrice diagonale avente sulla diagonale principale i due autovalori di A.

Esercizio 6.15

1. Il polinomio caratteristico è $\det(A - \lambda I) = \lambda^2(3 - \lambda)$ e gli autovalori di A sono: $\lambda_1 = 0$ con molteplicità algebrica $m.a.(0) = 2$, $\lambda_2 = 3$ con molteplicità algebrica $m.a.(3) = 1$.
2. $\dim V_0 = dim \ker A = 3 - rango(A) = 3 - 1 = 2$. $\dim V_3 = dim \ker(A - 3I) = 3 - rango(A - 3I) = 3 - 2 = 1$.
3. A è una matrice reale di ordine 3 con tutti e tre gli autovalori reali. Inoltre $m.a.(0) = \dim V_0$ e $m.a.(3) = \dim V_3$. Pertanto A è diagonalizzabile.

Esercizio 6.16

1. $W^\perp$ è la retta per l'origine perpendicolare al piano $x + 2z = 0$ che definisce W, ossia la retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

2. Si fissi in $\mathbb{R}^3$ una base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ in modo che v_1, v_2 siano due vettori unitari di W ortogonali tra loro e v_3 un vettore unitario ortogonale a v_1 e v_2. Per la proiezione su W si ha:

$$P_W(v_1) = v_1, \quad P_W(v_2) = v_2, \quad P_W(v_3) = 0$$

mentre per quella su $W^\perp$ si ha:

$$P_{W^\perp}(v_1) = 0, \quad P_{W^\perp}(v_2) = 0, \quad P_{W^\perp}(v_3) = v_3$$

Quindi le matrici diagonali D_1 e D_2 che rappresentano rispettivamente P_W e $P_{W^\perp}$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$ sono

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

3. Una base ortonormale $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^3$ con le proprietà esposte nel punto 2. è $v_1 = (-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}})$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}})$, dove $v_2 = v_3 \times v_1$. Sia invece $\mathcal{B}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori e_1, e_2, e_3. La matrice avente per colonne, nell'ordine, le $\mathcal{B}$-coordinate di v_1, v_2, v_3 è la matrice

$$P = \begin{vmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{vmatrix}$$

del cambiamento di base. Se A_1 e A_2 indicano le matrici che rappresentano rispettivamente P_W e $P_{W^\perp}$ rispetto alla base canonica $\mathcal{B}$ si ha: $D_1 = P^{-1}A_1P$ e $D_2 = P^{-1}A_2P$. Segue

$$A_1 = PD_1P^{-1} \qquad \text{e} \qquad A_2 = PD_2P^{-1}$$

4. $\dim(\text{Im } P_W) = 2$ e $\dim(\text{Ker } P_{W^\perp}) = 2$.
5. $\det P_W = \det P_{W^\perp} = 0$.

Esercizio 6.17

Esercizio 6.18

Esercizio 6.19

Esercizio 6.20

1. La prima colonna della matrice A che rapresenta l'endomorfismo P è $\frac{e_1 \cdot w}{w \cdot w}\, w = \frac{1}{5}(1, 0, 2)$. Analogamente per le altre due colonne. Quindi

$$A = \begin{vmatrix} 1/5 & 0 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2/5 & 0 & 4/5 \end{vmatrix}$$

Un altro modo per trovare la matrice A è il seguente. Si denoti con w' il vettore colonna w normalizzato:

$$w' = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{vmatrix}$$

Allora

$$A = w'\,(w')^t = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{vmatrix}$$

2. e 3. Per definizione di proiezione ortogonale, tutti i vettori v della retta di w hanno come proiezione se stessi: $P(v) = v$. La retta di w è quindi autospazio relativo all'autovalore 1. I vettori del piano $x + 2z = 0$, ortogonale a w, si proiettano nel vettore nullo. Quindi tale piano è autospazio relativo all'autovalore 0.

Riassumendo, gli autovalori e i relativi autospazi sono:

$\lambda_1 = 1$, con $m.g.(\lambda_1) = m.a.(\lambda_1) = 1$; autospazio $V_{\lambda_1} = L(w)$;

$\lambda_2 = 0$, con $m.g.(\lambda_1) = m.a.(\lambda_1) = 2$; autospazio $V_{\lambda_2} = (L(w))^\perp$.

7 Forme quadratiche.

Esercizio 7.1. *Scrivere la definizione di matrice ortogonale.*

Esercizio 7.2. *Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti reali. Dimostrare che se A è ortogonale allora* $\det A = \pm 1$.

Esercizio 7.3. *Si consideri l'operatore $\mathbb{R}^n \xrightarrow{F} \mathbb{R}^n$ Dimostrare che se $v \in \mathbb{R}^n$ è autovettore di F relativo all'autovalore λ allora kv ($k \in \mathbb{R},\ k \neq 0$) è autovettore di F relativo allo stesso autovalore λ.*

Esercizio 7.4. *Scrivere la matrice simmetrica associata alla forma quadratica su $\mathbb{R}^2$*

$$q(x_1, x_2) = x_1^2 - 5x_1x_2 + 3x_2^2$$

Esercizio 7.5. *Scrivere la matrice simmetrica associata alla forma quadratica su $\mathbb{R}^3$*

$$q(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *in* $\mathbb{R}$.

Esercizio 7.6. *Scrivere la forma quadratica su $\mathbb{R}^3$ associata alla matrice simmetrica*

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Esercizio 7.7. *Sia $A = (a_{ij})$ una matrice simmetrica $n \times n$. Verificare che*

$$a_{ij} = e_i^t A e_j \tag{7.1}$$

per ogni $i, j = 1, ..., n$.

Esercizio 7.8. *Si consideri il luogo di punti (x, y) del piano che soddisfano l'equazione*

$$5x^2 + 5y^2 - 8xy = 1$$

1. *Di quale conica si tratta?*
2. *Trovare una base ortonormale $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ rispetto alla quale la conica ha forma diagonale.*
3. *Qual è l'equazione della conica rispetto alla base $\mathcal{B}$?*

R

Esercizio 7.9. *Verificare che il luogo di punti* (x, y) *del piano che soddisfano l'equazione*

$$x^2 - y^2 + 2\sqrt{3}xy = 1$$

è una conica.

1. *Di quale conica si tratta?*
2. *Trovare le equazioni dei suoi assi di simmetria.*
3. *Trovare un cambio di variabili* $X = PX'$ *(con* P *ortogonale e* $\det P = 1$*) che porta la conica in forma diagonale.*

R

Esercizio 7.10. *Si consideri il luogo* $\mathcal{C}$ *di punti* (x, y) *del piano che soddisfano l'equazione*

$$-\frac{19}{10}x^2 - \frac{11}{10}y^2 + \frac{3}{5}xy = 1$$

Di che luogo si tratta?

R

Esercizio 7.11. *Trovare il minimo e il massimo valore che la forma quadratica* $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{q} \mathbb{R}$

$$q(x, y, z) = x^2 + 4xy - 3y^2 + 5z^2$$

assume sulla sfera unitaria S^2 *in* $\mathbb{R}^3$.

R

Esercizio 7.12. *Si consideri il luogo* $\mathcal{C}$ *di punti* (x, y, z) *dello spazio che soddisfano l'equazione*

$$x^2 + 4xy - y^2 + 3z^2 = 1$$

Di quale quadrica si tratta?

R

Esercizio 7.13 (Forme quadratiche definite positive)**.** *Sia* q *una forma quadratica su* $\mathbb{R}^n$, $q(X) = X^tAX$ *per ogni* X *in* $\mathbb{R}^n$, A *matrice simmetrica. Si dice che* q *è* definita positiva *se* $q(X) > 0$ *per ogni* $X \neq 0$. *Dimostrare che* q *è definita positiva se e solo se gli autovalori di* A *sono tutti positivi.*

Analogamente, si dice che q *è* definita negativa *se* $q(X) < 0$ *per ogni* $X \neq 0$. *Si dimostri che* q *è definita negativa se e solo se gli autovalori di* A *sono tutti negativi.*

Esercizio 7.14 (Forme quadratiche semidefinite positive). *Sia q una forma quadratica su $\mathbb{R}^n$, $q(X) = X^t AX$ per ogni X in $\mathbb{R}^n$, A matrice simmetrica. Si dice che q è* semidefinita positiva *se $q(X) \geq 0$ per ogni X. Dimostrare che q è semidefinita positiva se e solo se gli autovalori di A sono tutti maggiori o uguali a zero. Dare la definizione di forma quadratica* semidefinita negativa *e caratterizzare tali forme in termini di segni degli autovalori.*

Esercizio 7.15 (Forme quadratiche indefinite). *Una forma quadratica q su $\mathbb{R}^n$, $q(X) = X^t AX$ per ogni X in $\mathbb{R}^n$, A matrice simmetrica. si dice* indefinita *se q assume sia valori positivi che valori negativi. Dimostrare che q è indefinita se e solo se A ha sia autovalori positivi che autovalori negativi.*

Esercizio 7.16 (Forme quadratiche degeneri). *Sia $V \xrightarrow{L} V$ un operatore simmetrico e sia q la forma quadratica associata a L. Fissata una base ortonormale di V, sia A la matrice simmetrica che rappresenta q rispetto a tale base. La forma quadratica q si dice* degenere *se* $\det A = 0$. *Si dimostri che questa definizione è corretta, nel senso che non dipende dalla scelta della base. Dimostrare che q è degenere se e solo se nella segnatura di q compare almeno un autovalore nullo.*

7.1 Soluzioni

Esercizio 7.8 *1.* La matrice simmetrica associata alla forma quadratica $q(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - 8xy$ è $S = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$. Gli autovalori di S sono entrambi positivi ($\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 1$); la conica è un'ellisse.

2. Una base ortonormale $\mathcal{B}$ è costituita dai vettori $v_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ e $v_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

3. Rispetto alla base $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ l'ellisse ha equazione $9x'^2 + y'^2 = 1$.

Esercizio 7.9 *1.* La matrice simmetrica associata alla forma quadratica $q(x, y) = x^2 - y^2 + 2\sqrt{3}xy$ è $S = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{vmatrix}$. Gli autovalori di S sono discordi ($\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$); la conica è un'iperbole.

2. Gli assi di simmetria della conica sono gli autospazi di S, cioè le rette di equazione $-x + \sqrt{3}y = 0$ e $\sqrt{3}x + y = 0$.

3. Una base ortonormale è costituita dai vettori $v_1 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ e $v_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$; pertanto una martice (ortogonale) che diagonalizza S è $P = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix}$

Esercizio 7.10 Non esistono punti di $\mathbb{R}^2$ che soddisfano il luogo dato.

Esercizio 7.11 Gli autovalori associati alla matrice $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ sono $\lambda_1 = -1 - 2\sqrt{2}$, $\lambda_2 = -1 + 2\sqrt{2}$, $\lambda_3 = 5$. Pertanto il valore massimo che la forma quadratica $q(x, y, z)$ assume sulla sfera unitaria è 5 mentre quello minimo è $-1 - 2\sqrt{2}$.

Esercizio 7.12

8 Esercizi di ricapitolazione

Esercizio 8.1. *Sia* $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{R} \mathbb{R}^3$ *la rotazione dell'angolo* $\vartheta = \frac{\pi}{6}$ *attorno all'asse* x *e* $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{S} \mathbb{R}^3$ *la simmetria ortogonale rispetto al piano* $x = 0$. *Trovare le matrici che rappresentano, rispetto alla base canonica di* $\mathbb{R}^3$, *gli operatori:* $R, \quad R^3 = R \circ R \circ R, \quad S, \quad S \circ R$.

R

Esercizio 8.2. *Siano* $v, w \in \mathbb{R}^n$, $w \neq 0$.

1. *Trovare il vettore* $P_w(v)$, *proiezione ortogonale di* v *sulla retta di* w.
2. *Se* $v = (1, 0, 1)$ *e* $w = (2, 1, -1)$, *qual'è la proiezione ortogonale di* v *lungo* w
3. *L'angolo tra* v *e* w *è acuto o ottuso?*

R

Esercizio 8.3. *Scrivere le matrici che rappresentano, rispetto alle basi canoniche, le seguenti applicazioni lineari*

1. *In* $\mathbb{R}^3$, *la rotazione* R *di angolo* ϑ *attorno alla retta generata dal vettore* $(0, 1, 0)$.
2. *Il quadrato* R^2 *della precedente* R.
3. *In* $\mathbb{R}^2$, *la simmetria ortogonale* S_1 *rispetto alla retta* $y = 0$.
4. *In* $\mathbb{R}^3$, *la proiezione ortogonale* P_u *sulla retta del vettore* $u = (3, 0, -1)$.
5. *In* $\mathbb{R}^3$, *la proiezione ortogonale* P *sul piano di equazione* $2x - y - 2z = 0$
6. *In* $\mathbb{R}^3$, *la simmetria* S *rispetto al piano* $3x - 4z = 0$

R

Esercizio 8.4.

1. *Dimostrare che matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico. In altri termini, dimostrare che se* $A \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R})$ *allora* $A' = P^{-1}AP$ *ha lo stesso polinomio caratteristico di* A.
2. *Verificare che il viceversa non è vero: esistono matrici con lo stesso polinomio caratteristico che non sono simili.*

R

Esercizio 8.5 (Vero o falso?). *Se una matrice* A *di tipo* $(n \times n)$ *è digonalizzabile allora ha* n *autovettori distinti.*

R

Esercizio 8.6. *Dimostrare le seguenti proposizioni.*

1. *Sia* $A \in \big(\mathcal{M}(n \times n), \mathbb{R}\big)$. *Se* v *è autovettore di* A *con autovalore* λ *allora* v *è autovettore di* A^2 *con autovalore* λ^2.
2. *Siano* $A, B \in \big(\mathcal{M}(n \times n), \mathbb{R}\big)$. *Se* v *è autovettore sia di* A *che di* B *con autovalori rispettivamente* λ *e* μ *allora* v *è autovettore di* $A + B$ *con autovalore* $\lambda + \mu$.

R

Esercizio 8.7. *Sia* $A \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R})$, A *invertibile. Dimostrare le seguenti proposizioni.*

1. *Se* v *è autovettore di* A *con autovalore* λ *allora* $\lambda \neq 0$.
2. *Se* v *è autovettore di* A *con autovalore* λ *allora* v *è autovettore di* A^{-1} *con autovalore* $1/\lambda$.

R

Esercizio 8.8. *Sia* $A = [A^1, A^2, \dots, A^n] \in \mathcal{M}(n \times n)$, *dove* A^j, $j = 1, 2, \dots n$, *è la* j*-esima colonna di* A. *Dimostrare le seguenti proprietà:*

1. *Se la somma delle componenti di ogni colonna* A^j *di* A *è zero* $\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 0$ *per ogni* $j = 1, 2, \dots n\Big)$ *allora* $\det A = 0$
2. *Se la somma delle componenti di ogni colonna* A^j *di* A *è* 1 $\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ *per ogni* $j = 1, 2, \dots n\Big)$ *allora* $\lambda = 1$ *è un autovalore di* A*".*

R

Esercizio 8.9. *Sia* $A \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R})$. *Dimostrare che*

1. $A^t A$ *è simmetrica.*
2. $A^t A$ *ha* n *autovalori* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ *con* $\lambda_i \geq 0$.

R

Esercizio 8.10. *Sia* T *l'applicazione lineare da* $\mathbb{R}^3$ *in* $\mathbb{R}^3$ *che manda i vettori* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ *della base canonica rispettivamente in*

$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}_1) &= 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ T(\mathbf{e}_2) &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \\ T(\mathbf{e}_3) &= \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

1. *Trovare la matrice che rappresenta T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.*

2. *Determinare la dimensione del nucleo e la dimensione dell'immagine di T.*

3. *Trovare una base per il nucleo e una base per l'immagine.*

4. *Stabilire se T è invertibile.*

5. *Stabilire se il vettore di coordinate $(3, 1, 2)$ appartiene all'immagine di T.*

6. *L'operatore T è una isometria di $\mathbb{R}^3$?*

R

Esercizio 8.11. *Sia S l'operatore di $\mathbb{R}^2$ rappresentato, rispetto alla base canonica, dalla matrice*

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

1. *La matrice A è diagonalizzabile?*

2. *Trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ che diagonalizza S.*

3. *Disegnare l'immagine tramite S della circonferenza unitaria S^1.*

R

Esercizio 8.12.

1. *Scrivere la definizione di operatore* diagonalizzabile.

2. *Scrivere la definizione di* autovettore *di una matrice A di tipo $n \times n$.*

3. *Sia T l'applicazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ definita da*

$$T(x, y) = (x + 3y, 2y)$$

Trovare la matrice A che rappresenta T rispetto alla base canonica. L'operatore T è diagonalizzabile? Spiegare.

R

Esercizio 8.13. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

1. *Trovare una base di* Im A *e una base di* Ker A.

2. *Il numero 0 è autovalore della matrice A?*

R

8.1 Soluzioni

Esercizio 8.1

$$\mathcal{M}(R) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix}, \quad \mathcal{M}(R^3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \mathcal{M}(S) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\mathcal{M}(S \circ R) = \mathcal{M}(S)\mathcal{M}(R) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix},$$

Esercizio 8.2 1. $P_w(v) = \dfrac{v \cdot w}{w \cdot w}\, w$. 2. $P_w(v) = \dfrac{v \cdot w}{w \cdot w} w = \dfrac{1}{6}(2, 1, -1) = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{6}, -\dfrac{1}{6}\right)$

3. $v \cdot w = 1 > 0$, pertanto l'angolo $\widehat{vw}$ è acuto.

Esercizio 8.3

1. $\mathcal{M}(R) = \begin{vmatrix} \cos\vartheta & 0 & -\sin\vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\vartheta & 0 & \cos\vartheta \end{vmatrix}$ 2. $\mathcal{M}(R^2) = \begin{vmatrix} \cos 2\vartheta & 0 & -\sin 2\vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin 2\vartheta & 0 & \cos 2\vartheta \end{vmatrix}$.

3. $\mathcal{M}(S_1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$. 4. $\mathcal{M}(P_u) = \begin{vmatrix} \frac{3}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{10} \end{vmatrix}$.

5. Un vettore unitario ortogonale al piano di equazione $2x - y - 2z = 0$ è $u = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ mentre la proiezione P è data da

$$P(v) = v - (v \cdot u)u$$

Quindi la prima colonna della matrice che rappresenta P è

$$\begin{aligned} P(e_1) &= e_1 - (e_1 \cdot u)u \\ &= (1, 0, 0) - \tfrac{2}{3}(\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}) \\ &= (\tfrac{5}{9}, \tfrac{2}{9}, -\tfrac{4}{9}) \end{aligned}$$

In modo analogo si trovano le altre due colonne. La matrice che rappresenta P è

$$\begin{vmatrix} \frac{5}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{8}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} \end{vmatrix}$$

6. Un vettore unitario ortogonale al piano di equazione $3x - 4z = 0$ è $u = (\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5})$ mentre la simmetria S è data da

$$S(v) = v - 2(v \cdot u)u$$

Quindi la prima colonna della matrice che rappresenta S è

$$\begin{aligned} S(e_1) &= e_1 - 2(e_1 \cdot u)u \\ &= (1,0,0) - \tfrac{6}{5}(\tfrac{3}{5}, 0, -\tfrac{4}{5}) \\ &= (\tfrac{7}{25}, 0, -\tfrac{24}{25}) \end{aligned}$$

In modo analogo si ricavano le altre due colonne della matrice che rappresenta S.

Esercizio 8.4 1. Il polinomio caratteristico di A' è $\det(A' - \lambda I)$. Si ha:

$$\begin{aligned} \det(A' - \lambda I) &= \det(P^{-1}AP - \lambda I) \\ &= \det(P^{-1}AP - P^{-1}\lambda IP) \\ &= \det[P^{-1}(A - \lambda I)P] \\ &= \det P^{-1} \det(A - \lambda I) \det P \\ &= \det(A - \lambda I) \end{aligned}$$

2. Le matrici $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ hanno lo stesso polinomio caratteristico ma non sono simili.

Esercizio 8.5 Falso. Per esempio la matrice

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

è digonalizzabile (è già diagonale) ma l'autovalore $\lambda = 3$ ha molteplicità algebrica 2.

Esercizio 8.6

1.

$$\begin{aligned} A^2 v &= A(Av) \\ &= A(\lambda v) \quad \text{(per ipotesi, } v \text{ è autovettore di } A) \\ &= \lambda^2 v \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} (A+B)v &= Av + Bv \\ &= (\lambda v) + (\mu v) \quad \text{(per ipotesi, } v \text{ è autovettore di } A \text{ con autovalore } \lambda \\ &\qquad\qquad\qquad\quad \text{e autovettore di } B \text{ con autovalore } \mu) \\ &= (\lambda + \mu)v \end{aligned}$$

Esercizio 8.7 1. *Prima dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che $\lambda = 0$ sia un autovalore di A. Dall'uguaglianza $Av = 0$, moltiplicando a sinistra per A^{-1} si ottiene $v = 0$ (assurdo perchè v è autovettore di A). *Seconda dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che $\lambda = 0$ sia un autovalore di A, cioè $Av = 0$ con $v \neq 0$. Ciò significa che l'applicazione lineare rappresentata da A non è iniettiva (assurdo, perchè A è invertibile).

2. Per ipotesi si ha $Av = \lambda v$. Quindi $A^{-1}Av = A^{-1}\lambda v$ e dividendo per λ ($\neq 0$) si ottiene $A^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v$.

Esercizio 8.8 1. $A_1 + A_2 + \cdots + A_n = 0$, cioè la somma delle righe di A è uguale a zero. Quindi le righe di A sono linearmente dipendenti e $\det A = 0$.

2. È immediato verificare che la somma delle componenti di ciascuna riga della matrice $A - I$ è uguale a zero. Allora, per il punto 1. di questo esercizio, si ha: $\det(A - I) = 0$. Quindi $\lambda = 1$ è autovalore di A.

Esercizio 8.9 1. A^tA è simmetrica, infatti $(A^tA)^t = A^t(A^t)^t = A^tA$.

2. Esiste una base di autovettori, diciamo $v_1, v_2, \dots v_n$, che diagonalizza A^tA (teorema spettrale). Se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori, nell'ordine, di $v_1, v_2, \dots v_n$ si ha

$$0 \leq \|Av_i\|^2 = Av_i \cdot Av_i = (Av_i)^t(Av_i) = v_i^t(A^tA)v_i = v_i^t\lambda_i v_i = \lambda_i\|v_i\|^2$$

Poichè $\|v_i\|^2 > 0$, deve essere $\lambda_i \geq 0$ per ogni $i = 1, 2, \dots, n$.

Esercizio 8.10

1. La matrice che rappresenta T rispetto alla bnase canonica è

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

2. $\dim \operatorname{Im} T = \operatorname{rk} A = 2$ e $\dim \ker T = 3 - 2 = 1$ (Nullità + rango).

3. Per determinare una base di $\ker T$ bisogna risolvere il sistema lineare omogeneo $AX = 0$. Si ha:

$$\begin{cases} 2x & +y & & = 0 \\ x & & +z & = 0 \\ x & +y & -z & = 0 \end{cases}$$

RidRiducendo a scala si ottiene $\ker T = \{(-t, 2t, t)\ t \in \mathbb{R}\}$. Una base di $\ker T$ è formata dal vettore $(-1, 2, 1)$.

Una base di $\operatorname{Im} T$ è costituita dalle prime due colonne di A, cioè $(2,1,1)$, $(1,0,1)$.

4. $\det A = 0$, quindi T non è invertibile.

5. Una base di $\operatorname{Im} T$ è data dalle prime due colonne della matrice A (quesito n. 3). Il vettore $\begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$

sta nell'immagine di T perchè $\det \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

6. Le isometrie hanno determinante uguale a ± 1. $\det A = 0$ e pertanto T non è una isometria.

Esercizio 8.11 1. La matrice A è simmetrica e quindi diagonalizzabile (teorema spettrale).

Gli autovalori di A sono $\lambda = 1$ e $\lambda = 5$. L'autospazio V_1 relativo all'autovalore $\lambda = 1$ è $V_1 = \{(1, -1)t,\ t \in \mathbb{R}\}$; una base di V_1 è rappresentata dal vettore $v_1 = (1, -1)$.

L'autospazio V_5 relativo all'autovalore $\lambda = 5$ è $V_5 = \{(1, 1)t,\ t \in \mathbb{R}\}$; una base di V_5 è rappresentata dal vettore $v_2 = (1, 1)$.

Pertanto una base *ortogonale* di $\mathbb{R}^2$ che diagonalizza S è costituita dai vettori $v_1 = (1, -1)$, $v_2 = (1, 1)$. Normalizzando tali vettori si ottiene la base ortonormale richiesta, cioè

$$v_1' = (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}),\ v_2' = (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}})$$

Esercizio 8.12 3. $A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$

Gli autovalori di T sono reali e distinti ($\lambda = 1$ e $\lambda = 2$). Quindi T è diagonalizzabile.

Esercizio 8.13 3. $\dim \mathrm{Im}\ A = \mathrm{rk}\ A = 2$. Im A coincide con lo spazio vettoriale generato dalle prime due colonne di A; quindi $v_1 = (1, 3, -2)$, $v_2 = (0, 1, -1)$ formano una base di Im A. Lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $AX = 0$ è

$$Sol(A, 0) = \{(2, -7, 1)t\ t \in \mathbb{R}\}$$

Quindi una base di Ker A è $(2, -7, 1)$.

2. $\det A = 0$, pertanto 0 è autovalore di A.