Funzioni a più variabili

Cenni teorici ed esercizi

Mauro Saita
e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

[1]

Indice

1 Fatti teorici riguardanti funzioni da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$. **2**

2 Esercizi **5**

2.1 Soluzioni 10

[1]Nome file: Funzioni_a_n_variabili.tex

1 Fatti teorici riguardanti funzioni da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$.

1. `Insieme di livello.`

   Sia $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione. Si chiama *insieme di livello* c (con $c \in \mathbb{R}$) l'insieme

   $$f^{-1}(c) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, f(\mathbf{x}) = c\}$$

   Per $n = 2$, l'insieme $f^{-1}(c) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, f(x, y) = c\}$ si chiama *linea di livello* c di f; per $n = 3$ $f^{-1}(c) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, f(x, y, z) = c\}$ si chiama *superficie di livello* c di f.

2. `Derivata lungo un vettore.`

   Sia $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione; P_0 un punto fissato e $\mathbf{v}$ un vettore fissato. Si consideri la funzione, di una sola variabile,

   $$\varphi(t) = f(P_0 + t\mathbf{v})$$

   Si chiama *derivata di* f *nel punto* P_0 *lungo il vettore* $\mathbf{v}$, la derivata (se esiste) $\varphi'(0)$. Tale derivata si denota $D_{\mathbf{v}}f(P_0)$:

   $$D_{\mathbf{v}}f(P_0) = lim_{t\to 0}\frac{f(P_0 + t\mathbf{v}) - f(P_0)}{t}$$

   Se $|\mathbf{v}| = 1$, $D_{\mathbf{v}}f(P_0)$ si chiama *derivata direzionale nella direzione di* $\mathbf{v}$, *in* P_0.

3. `Gradiente.`

   Sia $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione. Se in un punto $\mathbf{x}$ di $\mathbb{R}^n$ esistono tutte le derivate parziali di f, si chiama *gradiente* di f nel punto $\mathbf{x}$ il vettore

   $$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x})\right)$$

4. `Funzioni differenziabili.`

   Una funzione $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ si dice differenziabile in $\mathbf{x}_0$ se esiste $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ e si ha:

   $$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + o\left(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|\right) \quad \text{per } \mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$$

   Nel caso $n = 2$, ponendo $\mathbf{x} = (x, y)$ e $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$, si ottiene:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,(y-y_0)+o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)$$

per $(x,y) \to (x_0,y_0)$.

5. `Piano tangente al grafico di` f.

   Sia $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ differenziabile in (x_0,y_0).
   L'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(x_0,y_0,f(x_0;y_0))$ è

   $$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + +\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

6. `Differenziabilità implica continuità.`

   $$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R} \text{ differenziabile in } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$
   $$\Downarrow$$
   $$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R} \text{ continua in } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

7. `Differenziabilità implica derivabilità lungo ogni vettore.`

   `(Regola del gradiente).`

   $$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R} \text{ differenziabile in } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$
   $$\Downarrow$$
   $$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}$$

8. `Il gradiente di una funzione` $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ `fornisce la direzione di`

   `massima crescita di` f.

   Se $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ è differenziabile in $\mathbb{R}^n$, il valore della derivata direzionale $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x})$ è soggetta alle seguenti limitazioni

   $$-|\nabla f(\mathbf{x})| \leq D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) \leq |\nabla f(\mathbf{x})|$$

   dove $\mathbf{u}$ è un qualsiasi vettore unitario. Inoltre $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x})$ assume valore massimo quando il vettore unitario $\mathbf{u}$ punta nella direzione e nel verso del vettore gradiente $\nabla f(\mathbf{x})$.

9. `Il gradiente è ortogonale agli insiemi di livello.`

Sia $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione e $\mathbf{x}_0$ un punto fissato di $\mathbb{R}^n$. Il gradiente $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ della funzione f valutato in $\mathbf{x}_0$ è ortogonale all'insieme di livello di f contenente $\mathbf{x}_0$.

Ad esempio, per $n = 2$, il gradiente $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ è ortogonale alla curva di livello di f passante per $\mathbf{x}_0$.

10. `Teorema del differenziale totale.`

Sia $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione e $\mathbf{x}_0$ un punto fissato di $\mathbb{R}^n$. Se f ha derivate parziali prime in tutto un intorno del punto $\mathbf{x}_0$ e queste derivate parziali sono continue in $\mathbf{x}_0$, allora f è differenziabile in $\mathbf{x}_0$.

11. `Teorema di Schwarz.`

Sia $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione e $\mathbf{x}_0$ un punto fissato di $\mathbb{R}^n$. Se le derivate miste $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ $(i \neq j)$ esistono in tutto un intorno del punto $\mathbf{x}_0$ e sono continue in $\mathbf{x}_0$, allora

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)$$

2 Esercizi

Esercizio 2.1. *Descrivere sommariamente i grafici delle seguenti funzioni, studiandone le intersezioni con piani paralleli ai piani coordinati.*

1. $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x,y) = 2x - 3y - 1$
2. $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$
3. $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2 + y^2$
4. $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2 - y^2$
5. $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x,y) = y^2$
6. $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Esercizio 2.2. *Descrivere le superfici di livello* $f(x,y,z) = 0$, $f(x,y,z) = 1$, $f(x,y,z) = 2$ *delle seguenti funzioni*

1. $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \quad f(x,y,z) = x - y + 2z$
2. $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2$
3. $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = x^2 + y^2$
4. $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$

Esercizio 2.3. *Il grafico della funzione* $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $z = f(x,y)$ *è la superficie di livello zero di un'opportuna* $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, $w = g(x,y,z)$. *Trovare la funzione* g.

Esercizio 2.4. *Mostrare che:* $\displaystyle \lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} \frac{x+y}{x-y} \neq \lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} \frac{x+y}{x-y}$

Esercizio 2.5. *Determinare, se esistono, i seguenti limiti*

$$a)\ \lim_{P\to O} \frac{x^3}{x^2+y^2} \qquad b)\ \lim_{P\to O} \frac{xy^2}{x^2+y^4} \qquad c)\ \lim_{P\to O} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$d)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \qquad e)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x}$$

Esercizio 2.6. *Stabilire se le seguenti funzioni sono continue in* $\mathbb{R}^2$

a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$ b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4-y^4}{x^4+y^4} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Esercizio 2.7. *Stabilire se le seguenti funzioni sono continue in* $\mathbb{R}^2$

a) $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x(x^2-y^2)}{x^2+xy+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \begin{cases} \frac{y|x|}{x^2+y^2+|x|} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Esercizio 2.8. *Determinare le derivate parziali prime per ognuna delle seguenti funzioni*

a) $f(x,y) = x^4y - 2x^2y^2 + 5y$ b) $f(x,y) = \frac{x}{y}$ c) $f(x,y) = e^{xy^2}$

d) $f(x,y) = \sin(3x+2y)$ e) $f(x,y) = x^2\ln(3x-y)$ f) $f(x,y) = \frac{e^{xy}}{x^2+1}$

Esercizio 2.9. *Verificare che* $f_{xy} = f_{yx}$ *per ognuna delle seguenti funzioni*

a) $f(x,y) = x^my^n$ *con* m, n *interi positivi.* b) $f(x,y) = \frac{x}{x+y}$ c) $f(x,y) = \cos(x^2+y)$

d) $f(x,y) = p(x)q(y)$ *per ogni* $p(x)$, $q(y)$ *differenziabile su* $\mathbb{R}$

Esercizio 2.10. *Sia* S *la semisfera grafico della funzione* $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$. *Scrivere l'equazione del piano tangente a* S *nel punto* $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Esercizio 2.11. *Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico della funzione*

$$f(x,y) = \frac{(x^2+y^2)}{xy}$$

nel punto $(1, 2, 5/2)$.

Esercizio 2.12. *Scrivere le equazioni parametriche per la retta ortogonale al grafico della funzione* $f(x,y) = e^xy$ *nel punto* $(-1, 1, e^{-1})$.

Esercizio 2.13. *Determinare le coordinate di tutti i punti della superficie di equazione*

$$z = x^4 - 4xy^3 + 6y^2 - 2$$

in cui la superficie ha un piano tangente orizzontale (parallelo al piano xy).

Esercizio 2.14. *Si consideri la funzione* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2/9 + y^2/4$.
Determinare i vettori $\nabla f(2, 2), \nabla f(3, -1), \nabla f(-2, 1)$.

Esercizio 2.15. *Utilizzando la definizione dire se le seguenti funzioni sono differenziabili nei punti indicati*

1. $f(x, y) = 2y \log(1 + x) \qquad (x_0, y_0) = (0, 0)$
2. $f(x, y) = xy - 3y^2 \qquad (x_0, y_0) = (1, 2)$

Esercizio 2.16. *Calcolare la derivata direzionale di* f *in* (x_0, y_0) *rispetto al vettore* $\mathbf{u}$.

a) $f(x, y) = x + 2x^2 - 3xy$; $\quad (x_0, y_0) = (1, 1)$; $\quad \mathbf{u} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.
b) $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$; $\quad (x_0, y_0) = (1, 0)$; $\quad \mathbf{u} = (2\sqrt{5}/5, \sqrt{5}/5)$.
c) $f(x, y, z) = xyz$; $\quad (x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$; $\quad \mathbf{u} = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$.
d) $f(x, y, z) = e^x + yz$; $\quad (x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$; $\quad \mathbf{u} = (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.

Esercizio 2.17. *Sia* $u = f(x, y, z) = (\sin xy)e^{-z^2}$. *In quale direzione, a partire da* $(1, \pi, 0)$, *si deve procedere perché l'incremento di* f *sia il piú rapido possibile?*

Esercizio 2.18. *Supponiamo che la temperatura* $T = T(x, y, z)$ *sia data da* $T(x, y, z) = e^{-x} + e^{-2y} + e^{3z}$. *Se ci troviamo nel punto* $(1, 1, 1)$, *in quale direzione dobbiamo muoverci perché la temperatura diminuisca il piú velocemente possibile?*

Esercizio 2.19. *Sia* $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ *il "vettore posizione" e poniamo* $r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. *Provare che*

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad r \neq 0$$

Esercizio 2.20. *Sia* $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. *Poniamo* $r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. *Provare che*

$$\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad r \neq 0$$

In quale direzione r *aumenta piú rapidamente? Interpretare la risposta geometricamente.*

Esercizio 2.21. *Verificare che la funzione* $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

ammette nell'origine derivata secondo qualsiasi direzione ma è discontinua in $(0,0)$.

Esercizio 2.22. *Sia* $X_0 \in \mathbb{R}^2$ *e* $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione differenziabile in ogni punto di* $\mathbb{R}^2$. *Determinare* $\nabla f(X_0)$ *conoscendo le due derivate direzionali seguenti:* $D_{(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})} f(X_0) = 3\sqrt{2}$ *e* $D_{(\frac{3}{5},-\frac{4}{5})} f(X_0) = 5$.

Esercizio 2.23. *Si consideri la funzione* $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - y^2$. *In ogni punto del grafico di* f *trovare un vettore ad esso ortogonale.*

Esercizio 2.24. *Si consideri la funzione* $\mathbb{R}^2 - \{0\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$.

a) Trovare l'equazione della retta tangente in $(1,-2)$ *alla curva di livello che passa per* $(1,-2)$.

b) Determinare la direzione di massima variazione di f *nel punto* $A = (3,1)$.

c) Verificare che la funzione $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ *è armonica.*

Una funzione $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$, *definita in un aperto* T *di* $\mathbb{R}^2$, *si dice* armonica *se in ogni punto di* T *soddisfa l'equazione differenziale alle derivate parziali (detta di* Laplace*):*

$$f_{xx} + f_{yy} = 0$$

Esercizio 2.25. *Sia* $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x,y) = -xy - y^2$. *Verificare se il campo vettoriale* ∇g *è ortogonale alle linee di livello della funzione* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy$.

Esercizio 2.26. *Si consideri la funzione* $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 y^3$.

a) *Scrivere l'approssimazione al primo ordine di* $f(x,y)$ *nel punto* $(3,1)$

b) *Utilizzando l'approssimazione al primo ordine trovata al punto a), scrivere un valore approssimato di* f *nel punto* $(3.1, 0.9)$.

Esercizio 2.27. *Si consideri la funzione* $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y+3z \geq 0\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) = \sqrt{x+2y+3z}$$

a) *Scrivere l'approssimazione al primo ordine di* $f(x,y)$ *nel punto* $(2,2,1)$

b) *Utilizzando l'approssimazione al primo ordine trovata al punto a), scrivere un valore approssimato di* f *nel punto* $(1.9, 1.8, 1.1)$.

Esercizio 2.28. *Determinare il differenziale* $(df)_{(0,0)}$ *della funzione* $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^{(x-3y)}$.

Esercizio 2.29.

1. *Disegnare in* $\mathbb{R}^2$ *l'immagine* $\operatorname{Im} f$ *della funzione* $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$, $f(t) = (1+t, t^2)$

2. *Sia* $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$, $f(t) = (5\cos t, 2\sin t)$ *e* $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, $g(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ *dove* g *è la funzione che fornisce la temperatura in ogni punto* (x,y) *del piano* $\mathbb{R}^2$. *Qual è il significato di* $g \circ f$*?*

Esercizio 2.30. *Le formule* $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$, *che esprimono il passaggio da coordinate polari a coordinate cartesiane, definiscono un'applicazione* $\Phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$. *Trovare la matrice Jacobiana di* Φ, *cioè la matrice che rappresenta il differenziale di* Φ, *in un punto* (r, ϑ).

Esercizio 2.31. *Sia* $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^{-x+2y}$ *e* $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2$, $g(t) = (t(t-1), t^3)$.
Trovare la derivata $(f \circ g)'(t)$.

Esercizio 2.32. *Sia* $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xe^{yz}$, *e* $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3$, $g(t) = (e^t, t, \sin t)$.
Trovare la derivata $(f \circ g)'(t)$.

Esercizio 2.33. *Sia* $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $w = f(x,y,z)$ *una funzione differenziabile in ogni* (x,y,z) *di* $\mathbb{R}^3$ *e* $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbb{R}^3$, $\mathbf{g}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ *una funzione differenziabile in ogni* (u,v) *di* $\mathbb{R}^2$. *Scrivere la regola di derivazione per la funzione composta* $f \circ \mathbf{g}$.

Esercizio 2.34. *Sia* $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xz\sin y$, *e* $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3$, $g(s,t,u) = (st^2, u+s, 2u-t)$. *Trovare le tre derivate parziali* $\dfrac{\partial(f \circ g)}{\partial s}$, $\dfrac{\partial(f \circ g)}{\partial t}$ *e* $\dfrac{\partial(f \circ g)}{\partial u}$.

2.1 Soluzioni

Esercizio 2.1 1) Piano non passante per l'origine. 2) Semisfera con centro nell'origine e raggio 2. 3) Paraboloide circolare. 4) Paraboloide iperbolico. 5) Cilindro parabolico. 6) Cono circolare.

Esercizio 2.2 1) $x-y+2z=k$ (tre piani nello spazio, per $k=0$ il piano passa per l'origine); 2) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=k$ (per $k=0$ la superficie di livello si riduce all'unico punto $C=(1,2,3)$, per $k=1,2$ si ottiene la sfera di centro $C=(1,2,3)$ e raggio $\sqrt{k}$); 3) $x^2+y^2=k$ (per $k=0$ si ha l'asse z, per $k=1,2$ si ha il cilindro avente per asse l'asse z, la cui sezione con il piano coordinato xy è la circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt{k}$); 4) $x^2+4y^2+9z^2=k$ (per $k=0$, la superficie di livello si riduce all'origine degli assi coordinati, per $k=1,2$ si ha l'ellissoide di semiassi rispettivamente $\sqrt{k}$, $\frac{\sqrt{k}}{2}$, $\frac{\sqrt{k}}{3}$).

Esercizio 2.3 La funzione richiesta è $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, $g(x,y,z)=f(x,y)-z$.

Esercizio 2.4 È immediato verificare che $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x+y}{x-y}=1$ e $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+y}{x-y}=-1$.

Esercizio 2.5 a) $\lim\limits_{P\to O} f(x,y)=0$.

Primo metodo.

$|f(x,y)|=\left|\frac{x^2\,x}{x^2+y^2}\right|\le |x| \longrightarrow 0$, per $(x,y)\longrightarrow(0,0)$.

Secondo metodo.

In coordinate polari: $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$. $f(\rho,\theta)=\frac{\rho^3\cos^3\theta}{\rho^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}=\rho\,\cos^3\theta\longrightarrow 0$, $\forall\theta$.

b) non esiste; c)non esiste; d) 0; e) non esiste.

Esercizio 2.6 Entrambe le funzioni sono discontinue in $(0,0)$.

Esercizio 2.8 a) $f_x=4x^3-4xy^2$, $f_y=x^4-4x^2y+5$; b) $f_x=\frac{1}{y}$, $f_y=-\frac{x}{y^2}$; c) $f_x=y^2e^{xy^2}$, $f_y=2xye^{xy^2}$; d) $f_x=3\cos(3x+2y)$, $f_y=2\cos(3x+2y)$; e) $f_x=2x\ln(3x-y)+\frac{3x^2}{3x-y}$, $f_y=-\frac{x^2}{3x-y}$; f) $f_x=\frac{e^{xy}[y(x^2+1)-2x]}{(x^2+1)^2}$, $f_y=\frac{xe^{xy}}{x^2+1}$.

Esercizio 2.9 A tale proposito si ricordi il seguente

Teorema (di Schwarz)

Sia A un intorno aperto di (x_0,y_0) e sia $f\in C^1(A)$. Se $f_{xy}(x,y)$ esiste ed è continua in A allora $f_{yx}(x_0,y_0)$ esiste e risulta

$$f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$$

Esercizio 2.10

Si ha $f_x = -x/\sqrt{1-x^2-y^2}$ e $f_y = -y/\sqrt{1-x^2-y^2}$. L'equazione del piano tangente a S nel punto (x_0, y_0, z_0) è

$$\begin{aligned}
z &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\
&= \sqrt{1-x_0^2-y_0^2} - \frac{x_0}{\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}}(x-x_0) - \frac{y_0}{\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}}(y-y_0) \\
&= z_0 - \frac{x_0}{z_0}(x-x_0) - \frac{y_0}{z_0}(y-y_0)
\end{aligned}$$

(perché $\sqrt{1-x_0^2-y_0^2} = z_0$), ossia: $x_0(x-x_0) + y_0(y-y_0) + z_0(z-z_0) = 0$. Si poteva arrivare piú rapidamente a questa ultima equazione, osservando che il piano tangente a una sfera di centro l'origine in un suo punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, è il piano passante per P_0 e ortogonale al vettore (x_0, y_0, z_0).

Esercizio 2.11 $\quad 6x - 3y + 4z - 10 = 0.$

Esercizio 2.12

La retta richiesta ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = -1 + e^{-1}t \\ y = 1 + e^{-1}t \\ z = e^{-1} - t \end{cases}$

Esercizio 2.13 $\quad (0,0,-2);\ (1,1,1);\ (-1,-1,1).$

Esercizio 2.14

1) $\nabla f(2,2) = (\frac{4}{9}, 1)$; 2) $\nabla f(3,-1) = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{2})$; 3)$\nabla f(-2,1) = (-\frac{4}{9}, \frac{1}{2})$.

Esercizio 2.15

1. Le restrizioni di f all'asse x e all'asse y sono costanti (valgono zero), quindi $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$

   Primo metodo.

   $$\left| \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \frac{|2y\log(1+x)|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le 2\,|\log(1+x)|$$

   Per $(x,y) \to (0,0)$, la quantità $2\,|\log(1+x)|$ tende a zero. Quindi f è differenziabile in $(0,0)$.

Secondo metodo.

f è differenziabile nell'origine se e solo se

$$\frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2y\log(1+x)}{\sqrt{x^2+y^2}} \longrightarrow 0$$

per $(x,y) \to (0,0)$.

Passando in coordinate polari, per $r \to 0$ e per ogni ϑ, si ottiene

$$\frac{2r\sin\vartheta\log(1+r\cos\vartheta)}{r} \sim 2r\sin\vartheta\cos\vartheta$$

La quantità $2r\sin\vartheta\cos\vartheta$ tende a zero uniformemente rispetto ϑ. Segue che f è differenziabile nell'origine.

2. $f(1,2) = -1$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2) = y\,\big|_{(1,2)} = 2\,,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2) = x - 6y\,\big|_{(1,2)} = -11$

   f è differenziabile nell'origine se e solo se

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{f(x,y) - f(1,2) - \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)\,(x-1) - \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\,(y-2)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}} = 0$$

   cioè

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy - 3y^2 - 2x + 11y - 10}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}} = 0$$

   Passando in coordinate polari ($x = 1 + r\cos\vartheta$, $y = 2 + r\sin\vartheta$) si ottiene

$$\lim_{r\to 0} r\sin\vartheta(\cos\vartheta - 3\sin\vartheta)$$

   Tale limite tende a zero uniformemente rispetto a ϑ, pertanto f è differenziabile in $(1,2)$.

Esercizio 2.16

Sia f una funzione differenziabile in (x_0,y_0) e $\mathbf{u}(u,v)$ un vettore di $\mathbb{R}^2$. Allora la derivata direzionale di f in (x_0,y_0) rispetto a $\mathbf{u}$ è $D_{\mathbf{u}}f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0)\cdot\mathbf{u}$ (regola del gradiente).

Le funzioni proposte sono differenziabili in tutti i punti dei rispettivi domini. Quindi, a) $-\frac{6}{5}$; b) $2\sqrt{5}/5$; c) $\sqrt{2}$; d) $e/\sqrt{3}$.

Esercizio 2.17

In ogni punto (x_0, y_0, z_0) la funzione $f(x, y, z)$ aumenta il più rapidamente possibile nella direzione di $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$. La direzione cercata è quella del vettore $(-\pi, -1, 0)$.

Esercizio 2.18.

In ogni punto (x_0, y_0, z_0) la funzione $T(x, y, z)$ diminuisce il più rapidamente possibile nella direzione di $-\nabla T(x_0, y_0, z_0)$. La direzione cercata è quella del vettore $(e^{-1}, 2e^{-2}, -3e^3)$.

Esercizio 2.21

La funzione è discontinua nell'origine, infatti la restrizione di f alla parabola di equazione $y = x^2$, $x \neq 0$ vale identicamente uno ($f(x, x^2) = 1$), mentre $f(0, 0) = 0$.

La restrizione della funzione all'asse x è identicamente nulla e pertanto, se $v = (1, 0)$, $D_v f(0, 0) = 0$. Per verificare l'esistenza delle derivate direzionali secondo ogni altra direzione si consideri il vettore di direzione $v = (\cos\theta, \sin\theta)$ e si consideri la restrizione di f alla retta di equazioni parametriche $\begin{cases} x = (\cos\theta)t \\ y = (\sin\theta)t \end{cases}$

Fissato l'angolo θ (con $\theta \neq 0$ e $\theta \neq \pi$) si ha: $f(t\cos\theta, t\sin\theta) = \dfrac{(\cos^2\theta)}{\sin\theta}t$ e, di conseguenza, $D_v f(0, 0) = \dfrac{(\cos^2\theta)}{\sin\theta}$.

Esercizio 2.22 $\nabla f(X_0) = (7, -1)$

Esercizio 2.23

Il grafico di f coincide con la superficie di livello zero della funzione $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, $g(x, y, z) = x^2 - y^2 - z$. Inoltre, il $\nabla g(x, y, z)$ è ortogonale alla superficie di livello zero di g nel punto (x, y, z) di tale superficie. Quindi, in ogni punto del grafico di f il vettore $\nabla g(x, y, z) = (2x, -2y, -1)$ risulta ad esso ortogonale.

Esercizio 2.24

a) Le equazioni parametriche della tangente richiesta sono $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \end{cases}$

b) La direzione di massima variazione è quella del vettore $(\frac{3}{5}, \frac{1}{5})$

Esercizio 2.25

Il campo vettoriale ∇g non è ortogonale alle linee di livello della funzione f perché $\nabla g = (-y, -x - 2y)$ non è proporzionale a $\nabla f = (y, x)$.

Esercizio 2.26

a) Per ogni $X_0 \in \mathbb{R}^2$ e per ogni $H \in \mathbb{R}^2$ di lunghezza 'infinitesima ', abbiamo $f(X_0 + H) \simeq f(X_0) + \nabla f(X_0)H$.

Posto $X_0 = (3,1)$ e $H = (h,k)$ otteniamo $f(3+h, 1+k) = 9 + 6h + 27k$.

b) $f(3.1, 0.9) = f(3 + 0.1, 1 - 0.1) = 6.9$

Esercizio 2.27

a) Per ogni $X_0 \in \mathbb{R}^3$ e per ogni $H \in \mathbb{R}^3$ di lunghezza 'infinitesima rq , abbiamo $f(X_0 + H) \simeq f(X_0) + \nabla f(X_0)H$. Posto $X_0 = (2,2,1)$ e $H = (h,k,l)$ otteniamo $f(2+h, 2+k, 1+l) = 3 + \frac{1}{6}h + \frac{1}{3}k + \frac{1}{2}l$.

b) $f(2 - 0.1, 2 - 0.2, 1 + 0.1) = \dfrac{178}{60}$

Esercizio 2.29 1) Parabola di equazione $y = (x-1)^2$; 2) $g \circ f$ fornisce la temperatura in ogni punto dell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Esercizio 2.28 $(df)_{(0,0)}$ è l'applicazione lineare $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ che a (h,k) associa $(df)_{(0,0)}(h,k) = h - 3k$

Esercizio 2.31

$(f \circ g)'(t) = (6t^2 - 2t + 1)e^{2t^3 - t^2 + t}$

Esercizio 2.32

$(f \circ g)'(t) = e^{t(1+\sin t)}(1 + \sin t + t\cos t)$.

Esercizio 2.33

w è la variabile dipendente, x, y, z sono le variabili intermedie e u, v le variabili indipendenti.

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$$

Esercizio 2.34

$\dfrac{\partial(f \circ g)}{\partial s} = t^2(2u - t)\sin(u + s) + st^2(2u - t)\cos(u + s)$,

$\dfrac{\partial(f \circ g)}{\partial t} = (4stu - 3st^2)\sin(u + s)$ e $\dfrac{\partial(f \circ g)}{\partial u} = st^2(2u - t)\cos(u + s) + st^2\sin(u + s)$.