Campi magnetici variabili nel tempo. Esercizi.

Mauro Saita

Versione provvisoria. Novembre 2018[1]

Per commenti o segnalazioni di errori scrivere, per favore, a:

maurosaita@tiscalinet.it

Indice

[1] File: "Induzione_elettromagnetica_esercizi.tex"

1 Legge di Faraday. Legge di Lenz.

Esercizio 1.1. *Enunciare e spiegare la* legge di Faraday-Neumann.

R

Esercizio 1.2. *Il grafico qui sotto mostra l'andamento, nel tempo, del flusso magnetico attraverso una spira. Trovare il valore della forza elettromagnetica indotta nella spira all'istante* $t = 0,05$ s. *Trovare il valor medio della forza elettromagnetica indotta nella spira nell'intervallo di tempo compreso tra* $t = 0,2$ s *e* $t = 0.5$ s

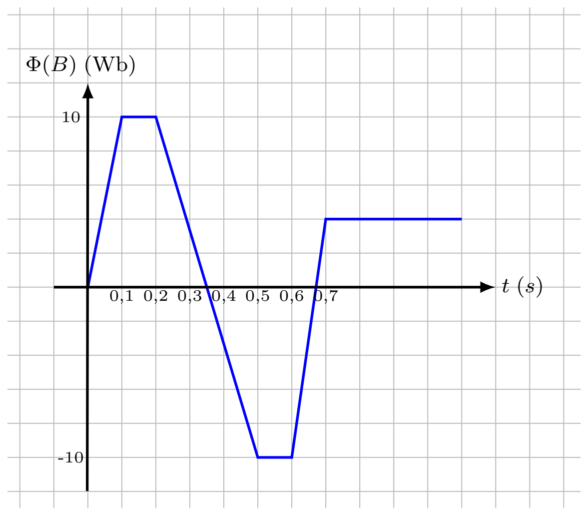

Figura 1: Grafico del flusso magnetico $\Phi(\mathbf{B})$ in funzione del tempo.

R

Esercizio 1.3. *Il flusso magnetico attraverso una spira è espresso, in funzione del tempo, da*

$$\Phi(\mathbf{B}(t)) = 5\sin\left(12\,t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Trovare il valore assoluto della forza elettromagnetica indotta nella spira all'istante $t = 0,05$ s *e all'istante* $t = 0,3$ s. *Trovare il valor medio della forza elettromagnetica indotta nella spira nell'intervallo di tempo compreso tra* $t = 0$ *e* $t = 0.5$

R

Esercizio 1.4. *Qual è il significato del segno 'meno' nella* legge di Lenz*? Spiegare.*

R

Esercizio 1.5. *Un circuito è costituito da una resistenza e da un condensatore. Esso è immerso in un campo magnetico* $\mathbf{B}$ *avente direzione perpendicolare al piano contenente il* *circuito e verso entrante nel foglio (si veda la figura). Se l'intensità del campo magnetico aumenta quale armatura del condensatore (inferire/superiore) acquista una carica positiva?*

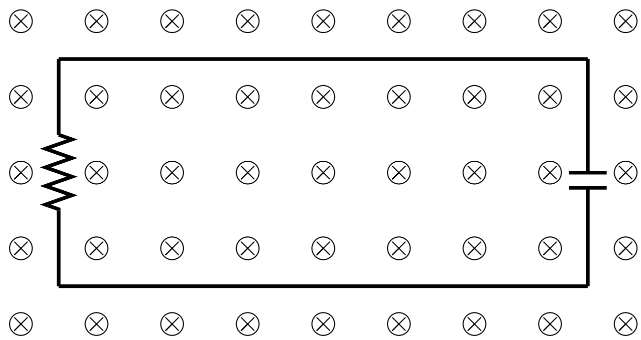

Figura 2: Circuito con resistenza e condensatore immerso in un campo magnetico la cui intensità aumenta nel tempo.

$\boxed{R}$

Esercizio 1.6. *Si ha un lungo filo conduttore percorso da corrente e da tre anelli di rame disposti come in figura. Nell'ipotesi che l'intensità i di corrente aumenti nel tempo si stabilisca se nei tre anelli si genera una corrente indotta e in caso affermativo se ne determini il verso.*

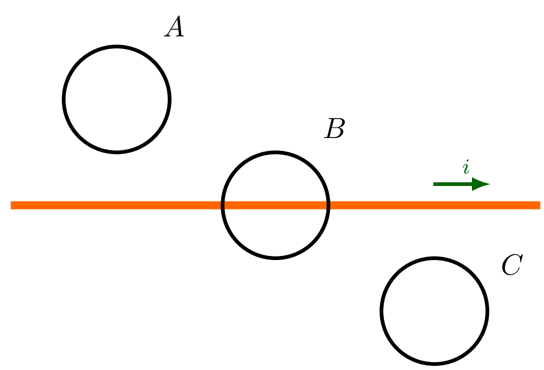

Figura 3: Filo percorso da una corrente che aumenta nel tempo e tre anelli di materiale conduttore. Circola corrente nei tre anelli? Se sì, qual è il verso della corrente indotta nei tre casi?

$\boxed{R}$

Problema 1.7. *Una barretta di metallo di lunghezza l è immersa in un campo magnetico uniforme* $\mathbf{B}$*, direzione perpendicolare rispetto al foglio e verso "entrante" rispetto al foglio stesso. Determinare la f.e.m indotta alle estremità della barretta nell'ipotesi che essa si muova con velocità (costante)* $\mathbf{v}$ *nella direzione e verso mostrate in figura.*

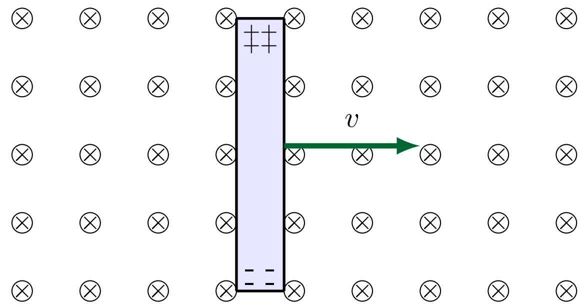

Figura 4: Barretta metallica in moto in un campo magnetico uniforme.

R

Esercizio 1.8. *Con riferimento al problema precedente si determini la f.e.m indotta alle estremità della barretta sapendo che:* $l = 0,30$ cm, $\mathbf{B} = 0,30\,\mathrm{T}$ *e* $v = 2\,\mathrm{m/s}$.

R

Esercizio 1.9. *Una bobina ha* 100 *spire, raggio* $r = 5,0$ cm *e resistenza di* $30\ \Omega$. *Con quale rapidità deve variare un campo magnetico* $\mathbf{B}$ *perpendicolare alla bobina per generare in essa la corrente di* 6 A*?*

R

Esercizio 1.10. *Un circuito è immerso in un campo magnetico. Descrivere in quali modi è possibile variare il flusso magnetico concatenato con il circuito.* $1\,\mathrm{Wb/s} = 1\,\mathrm{V}$, *spiegare.*

R

Esercizio 1.11. *Un circuito di forma rettangolare, avente i lati di* 40 cm *e* 20 cm, *è immerso in un campo magnetico* $\mathbf{B}$ *uniforme. La direzione di* $\mathbf{B}$ *è perpendicolare al piano del circuito e la sua intensità cresce uniformemente nel tempo con velocità* $\dfrac{d\mathbf{B}}{dt} = 0,5\,\mathrm{T/s}$. *Determinare la forza elettromotrice indotta nel circuito.*

R

Problema 1.12. *Un conduttore metallico* $ABCD$, *di resistenza trascurabile, è stato piegato a forma di U; i due tratti paralleli distano* l. *Su di esso può traslare orizzontalmente, senza attrito, il conduttore* PQ *che possiede una resistenza pari a* R.

Il dispositivo viene immerso in un campo magnetico $\mathbf{B}$ *uniforme e costante, diretto perpendicolarmente rispetto al piano che contiene il circuito, il cui verso è quello specificato in figura. Calcolare*

1. *il valore della corrente indotta nel circuito.*

2. *la potenza che occorre spendere per mantenere in movimento il conduttore mobile.*

(Trascurare l'autoinduzione del circuito).

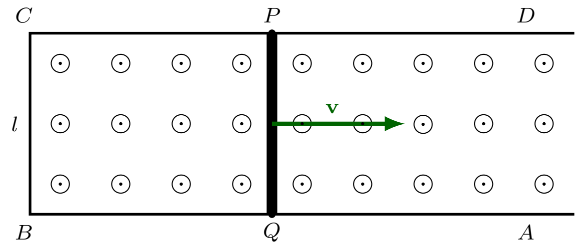

Figura 5

R

Esercizio 1.13. *Con riferimento al problema precedente si sa che* $PQ = 20$ cm*,* $R = 30\ \Omega$*,* $B = 0,5$ T*,* $v = 2,5$ m/s*. Trovare*

1. *il valore della corrente indotta nel circuito.*
2. *la potenza che occorre spendere per mantenere in movimento il conduttore mobile.*

R

Problema 1.14. *Lungo un conduttore metallico* $ABCD$*, come quello mostrato in figura, scorre senza attrito, sotto l'azione del proprio peso, una barretta conduttrice di massa* m*. Sia* R *la resistenza del conduttore. Il dispositivo è immerso in un campo magnetico uniforme e costante, di modulo* B*, ortogonale al foglio, con verso 'uscente' dal foglio stesso.*

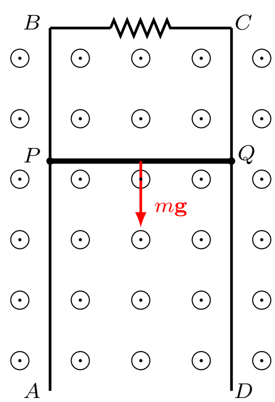

Figura 6

Nell'ipotesi che all'istatnte $t = 0$ *la barretta sia ferma si determini, al variare di* t*, la corrente indotta nel circuito e la velocità della barretta. (Trascurare le altre resistenze dei conduttori, l'autoinduzione del circuito, la resistenza dell'aria).*

R

2 Autoinduzione

Esercizio 2.1. *In un circuito elettrico, il flusso di campo magnetico è* $8,0 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{Wb}$ *e l'intensità di corrente che circola nel circuito è* $8,0 \cdot 10^{-1}\,\mathrm{A}$. *Determinare il coefficiente di autoinduzione nel circuito.*

R

Esercizio 2.2. *In un circuito elettrico, nell'intervallo di* $\Delta t = 0,060\,\mathrm{s}$ *si ha una variazione di corrente di* $1,4\,\mathrm{A}$. *Se l'induttanza del circuito è pari a* $L = 35\,\mu\mathrm{H}$, *si determini il valore della forza elettromotrice indotta. Interpretare il segno ottenuto nel risultato.*

R

Esercizio 2.3. *Un solenoide, lungo* $20\,\mathrm{cm}$, *è costituito da* 400 *spire ognuna delle quali di area* $6\,\mathrm{cm}^2$ *e è avvolto su un materiale di permeabilità magnetica relativa* $\mu_r = 900$. *Determinare*

1. *il coefficiente di autoinduzione del solenoide.*
2. *il flusso concatenato con il solenoide quando questo è attraversato da una corrente stazionaria di* $15\,\mathrm{A}$.
3. *la forza elettromotrice che si autoinduce nel solenoide quando la corrente di* $15\,\mathrm{A}$ *che lo attraversa diminuisce uniformemente nel tempo annullandosi in* 3 *secondi.*

R

Esercizio 2.4. *L'induttanza, in un circuito elettrico, è* $L = 5,5 \cdot 10^{-1}\,\mu\mathrm{H}$. *Se l'intensità di corrente varia da* 0 *a* $5,0 \cdot 10^{-1}\,\mathrm{A}$ *in* $4,0\,\mathrm{s}$, *trovare la forza elettromotrice indotta nel circuito.*

R

3 Corrente alternata

3.1 Una sintesi

1. `Forza elettromotrice e corrente.` In un circuito alimentato da un generatore a corrente alternata la forza elettromotrice (tensione) f è espressa dalla seguente uguaglianza

$$f = f_{\texttt{max}} \sin(\omega t) \tag{3.1}$$

se il circuito è formato da una resistenza R collegata in serie con f, allora la corrente che circola nel circuito è

$$i = \frac{f}{R} = \frac{f_{\texttt{max}}}{R} \sin(\omega t) = i_{\texttt{max}} \sin(\omega t) \tag{3.2}$$

Tensione e corrente sono in fase.

2. `Potenza.` La potenza dissipata nel resistore varia in funzione del tempo t secondo la legge seguente

$$P(t) = i^2(t)\, R = i^2_{\texttt{max}}\, R \sin^2(\omega t) \tag{3.3}$$

Infatti $P(t) = i\, f$ e $f = R\, i$. Segue che $P(t) = i^2\, R$

A meno di traslazioni di $\frac{\pi}{2}$ le funzioni $y = \sin^2(\omega t)$ e $y = \cos^2(\omega t)$ coincidono e il valor medio di entrambe le funzioni vale $\dfrac{1}{2}$. Pertanto la potenza media dissipata nel resistore è

$$P_m = \frac{1}{2}\, i^2_{max}\, R \tag{3.4}$$

3. `Valori efficaci (valori quadratici medi).` Il valore efficace della funzione $y = y(t)$ è la radice quadrata del valor medio di $y^2(t)$, cioè

$$y_{\texttt{eff}} = \sqrt{[y^2(t)]_{\texttt{medio}}} \tag{3.5}$$

Ricordando che il valor medio di $\sin^2(\omega t)$ e $\cos^2(\omega t)$ è uguale a $\dfrac{1}{2}$, i valori efficaci della forza elettromotrice ($f(t) = f_{\texttt{max}} \sin(\omega t)$) e dell'intensità di corrente sono

$$f_{\texttt{eff}} = \sqrt{[f^2_{\texttt{max}} \sin^2(\omega t)]_{\texttt{medio}}} = \frac{f_{\texttt{max}}}{\sqrt{2}} \tag{3.6}$$

$$i_{\texttt{eff}} = \frac{i_{\texttt{max}}}{\sqrt{2}} \tag{3.7}$$

Infine, sostituendo (3.7) in (3.4) si ottiene il valore della potenza media

$$P_m = i^2_{\texttt{eff}}\, R \tag{3.8}$$

Esercizio 3.1. *Descrivere il principio di funzionamento di un alternatore (generatore di corrente alternata) e di una dinamo.*

R

Esercizio 3.2 (Una diversa formulazione del Quesito 1, Simulazione MIUR, 11 marzo 2015.)**.**
Si consideri il dispositivo rappresentato in figura

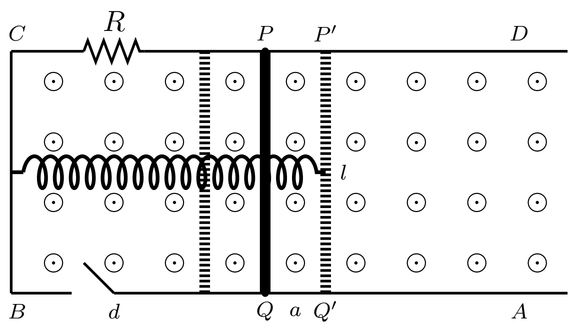

Figura 7: Il conduttore mobile PQ oscilla tra $d-a$ e $d+a$.

Il conduttore mobile PQ ha lunghezza l ed è collegato mediante una molla, di massa trascurabile e di costante elastica k, al lato BC del circuito (i collegamenti sono realizzati con materiale isolante); esso può scorrere orizzontalmente lungo i due binari paralleli BA e CD. Il dispositivo è immerso in un campo magnetico $\mathbf{B}$ uniforme e costante, diretto ortogonalmente rispetto al foglio, con verso 'uscente' dal foglio stesso.

Il conduttore viene spostato di un tratto di lunghezza a rispetto alla posizione di equilibrio della molla e poi (partendo da fermo) viene lasciato libero di oscillare.

Nell'ipotesi che l'interruttore sia aperto determinare

1. *la legge oraria del moto del conduttore mobile e la sua velocità rispetto al tempo.*
2. *il valore della costante elastica k della molla che consente di fare oscillare un conduttore mobile di massa $m = 2,0 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{kg}$ alla frequenza di $f = 50,0\,\mathrm{Hz}$.*

Agli estremi P, Q del conduttore mobile si genera una differenza di potenziale variabile nel tempo.

3. *Trovare la funzione che esprime la differenza di potenziale in funzione della velocità v. Nel caso $a = 1,0 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$, $l = 1,0 \cdot 10^{-1}\,\mathrm{m}$, $B = 0,30\,\mathrm{T}$ calcolare la massima differenza di potenziale.*

Successivamente l'interruttore viene chiuso e gli effetti elettromagnetici che si producono sul circuito trasformano il moto del conduttore mobile in un moto armonico smorzato.

4. *Spiegare in termini qualitativi il fenomeno fisico e determinare l'andamento della tensione, in funzione del tempo, ai capi del resistore.*

6. *Analizzare il funzionamento del dispositivo dal punto di vista energetico e spiegare perchè tale circuito non permette di generare corrente in modo efficace.*

R

4 Corrente di spostamento e altri esercizi

Esercizio 4.1 (Limiti di validità della legge di Ampere.). *La legge di Ampere vale nel caso di correnti uniformi. Che cosa succede se la corrente varia nel tempo? Spiegare.*

R

Esercizio 4.2 (Legge di Ampere-Maxwell.). *Maxwell modificò la legge di Ampere introducendo un correttivo che la rende valida anche nel caso di correnti variabili nel tempo. In cosa consiste tale modifica? Spiegare.*

R

Esercizio 4.3 (Corrente di spostamento.). *Un condensatore piano è formato da due armature circolari di raggio R poste a breve distanza una dall'altra. La carica affluisce su una armatura e defluisce dall'altra con rapidità $i = 1,8\,\mathrm{A}$. Determinare l'intensità della corrente di spostamento tra le armature.*

R

Esercizio 4.4 (Induzione magnetica tra le armature di un condensatore durante la fase di carica.). *Un condensatore piano è formato da due armature circolari di raggio R poste a breve distanza una dall'altra. Se l'intensità della corrente di conduzione che affluisce sull'armatura positiva è i, si determini il vettore induzione magnetica in un punto tra le due armature che si trova a distanza r ($r < R$) dall'asse delle armature. Trovare B nel caso in cui l'intensita della corrente di conduzione è $i = 4,5$ A, $R = 5$ cm e $r = 3$ cm.*

R

Esercizio 4.5. *Per mantenere in moto una spira di rame in un campo magnetico si applica la forza $\mathbf{F}$. Se l'intensità del campo magnetico viene raddoppiata, quale forza occorre applicare alla spira per mantenerla in moto alla stessa velocità?*

R

Esercizio 4.6. *Un solenoide è formato da 5 spire rettangolari; le dimensioni di ciascuna spira sono $2,0\,\mathrm{cm}$ e $3,0\,\mathrm{cm}$. Il solenoide è disposto perpendicolarmente a un campo magnetico uniforme di intensità $B = 4,0 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{T}$. Se l'intensità del campo magnetico si riduce a zero in $t = 10^{-3}\,\mathrm{s}$, determinare, in tale intervallo di tempo, la forza elettromotrice indotta nel solenoide.*

$\boxed{R}$

Esercizio 4.7. *Descrivere il fenomeno di autoinduzione elettromagnetica.*

$\boxed{R}$

Esercizio 4.8.

$\boxed{R}$

5 Soluzioni

Esercizio 1.1

Si consideri il caso di una spira conduttrice immersa in un campo magnetico. Se il flusso di $\mathbf{B}$ concatenato con la spira varia nel tempo, nella spira si registra passaggio di corrente. In altri termini, se nell'intervallo di tempo Δt si ha una variazione di flusso allora la forza elettromotrice indotta f_i nella spira eguaglia la variazione $\Delta\Phi(\mathbf{B})$ di flusso rispetto all'intervallo di tempo Δt

$$\overline{f}_i = \frac{\Delta\Phi(\mathbf{B})}{\Delta t} \tag{5.1}$$

$\overline{f}_i$ costituisce il valore medio della forza elettromotrice indotta nella spira, nell'intervallo Δt. Essa è uguale alla rapidità di variazione del flusso magnetico nel tempo. Ovviamente, se si provoca la stessa variazione di flusso in un intervallo di tempo minore la forza elettromotrice sarà maggiore.

Per trovare la forza elettromotrice all'istante t bisogna passare al limite per $\Delta t \to 0$

$$f_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\Phi(\mathbf{B})}{\Delta t} = \frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} \tag{5.2}$$

L'uguaglianza (5.2) si chiama legge di *Faraday-Neumann*.

Possibili approfondimenti: descrizione dell'*esperimento dell'anello* attraverso il quale Michael Faraday scoprı, nel 1831, l'induzione elettromagnetica.

Esercizio 1.2 In $t = 0,05$ s la forza elettromotrice indotta è $f_i = -\left[\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt}\right]_{t=0,05}$. Essa coincide con il coefficiente angolare del segmento di estremi $(0;0)$, $(0,1;10)$. Quindi

$$f_i = -\frac{10 \text{ Wb} - 0}{0,1 \text{ s}} = -100 \text{ V}$$

$$f_i = -\frac{\Delta\Phi(\mathbf{B})}{\Delta t} = -\frac{-10 \text{ Wb} - 10 \text{ Wb}}{0,5 \text{ s} - 0,2 \text{ s}} = -\frac{-20 \text{ Wb}}{0,3 \text{ s}} = 66,7 \text{ V}$$

Esercizio 1.3

Esercizio 1.4

Si consideri un circuito immerso in un campo magnetico. Se il flusso magnetico concatenato con il circuito varia nel tempo allora nel circuito si induce una forza elettromotrice $f_i = \frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt}$ (legge di Faraday-Neumann). Si può ricavare il valore dell'intensità di corrente che circola nel circuito all'istante t ricordando la legge di Ohm ($f = R\,i$). Si ottiene:

$$i(t) = \frac{f}{R} = \frac{1}{R}\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} \tag{5.3}$$

La legge di Lenz stabilisce il verso con cui questa corrente scorre nel circuito. Più precisamente, la corrente i è causata dalla variazione (nel tempo) del flusso $\Phi(\mathbf{B})$, dove $\mathbf{B}$ è il campo magnetico in cui è immerso il circuito. Tuttavia la corrente i che circola nel circuito genera a sua volta un campo magnetico $\mathbf{B'}$ il cui flusso $\Phi(\mathbf{B'})$ ha segno opposto rispetto a quello di $\Phi(\mathbf{B})$.

La legge di Lenz esprime la tendenza dei sistemi fisici elettromagnetici, ad opporsi a rapide variazioni di stato, così come in dinamica i corpi tendono ad opporsi a rapide variazioni di velocità (inerzia meccanica).

Un altro modo per spiegare il segno 'meno' che compare nella legge di Lenz

$$f_i = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} \tag{5.4}$$

consiste nell'utilizzare il principio di conservazione dell'energia. La corrente indotta nel circuito dà origine a un campo magnetico e, di conseguenza, a un flusso concatenato con il circuito. Questo flusso deve opporsi alla variazione di flusso che ha inizialmente generato la corrente indotta, altrimenti, se tale corrente generasse un flusso che favorisse la variazione complessiva di flusso, la forza elettromotrice indotta aumenterebbe e ciò provocherebbe un ulteriore aumento della forza elettromotrice indotta. In questo modo la corrente nel circuito crescerebbe indefinitivamente senza spese di energia, contraddicendo così il principio di consevazione dell'energia.

Esercizio 1.5

La variazione di intensità del campo magnetico $\mathbf{B}$ (che sta aumentando) causa una variazione del flusso $\Phi(\mathbf{B})$ concatenato con il circuito che a sua volta (legge di Faraday) genera una corrente indotta. Per la legge di Lenz tale corrente deve circolare nel circuito in modo da opporsi al cambiamento che l'ha generata. Quindi la corrente deve circolare in senso *antiorario* in modo da generare un campo magnetico indotto opposto a $\mathbf{B}$, ossia uscente dal foglio. Il condensatore inizia a caricarsi e la sua l'armatura *inferiore* acquista carica positiva.

Esercizio 1.6

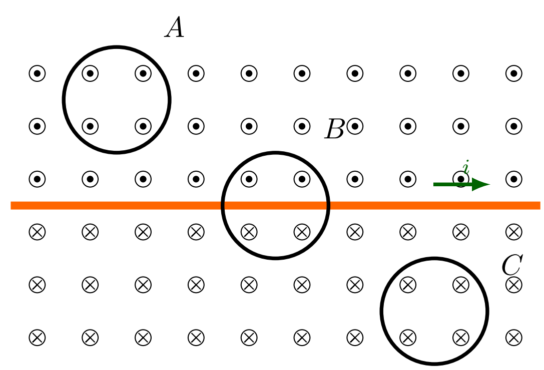

Figura 8: Filo percorso da una corrente che aumenta nel tempo e tre anelli di materiale conduttore. Circola corrente nei tre anelli? Se sì, qual è il verso della corrente indotta nei tre casi?

`Anello` A. Il flusso del campo magnetico (generato dalla corrente che scorre nel filo e concatenato con l'anello) varia nel tempo. Nell'anello si genera una forza elettromotrice e una corrente indotta. Per la legge di Lenz, il verso della corrente deve essere tale da opporsi alla variazione di flusso che l'ha generata; pertanto la corrente circola in senso *orario*.

`Anello` C. La situazione è analoga alla precedente: nell'anello si genera una forza elettromotrice e una corrente indotta dovuta alla variazione di flusso. Tuttavia in questo caso, per la legge di Lenz, il verso della corrente indotta è *antiorario*.

`Anello` B. La variazione di flusso concatenato con l'anello è zero. Quindi non vi è forza elettromotrice indotta nè corrente.

Esercizio 1.7 Si può spiegare l'origine della f.e.m che si genera alle estremità della barretta conduttrice analizzando le forze che agiscono sugli elettroni di conduzione.

Ogni singolo elettrone si muove orizzontalmente verso destra con velocità $\mathbf{v}$; su di esso si esercita una forza magnetica $\mathbf{F_m} = e\,\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ avente direzione verticale, orientamento verso il basso e modulo $e\,v\,B$.

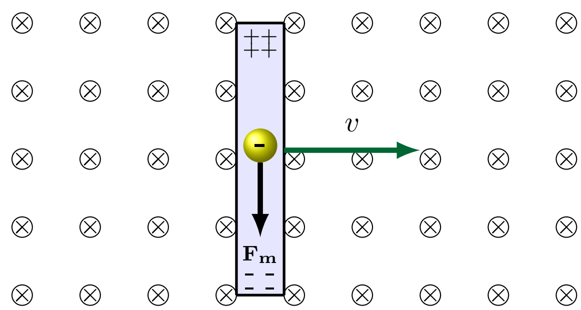

Figura 9: Sull'elettrone libero agisce la forza di Lorenz $\mathbf{F_m} = e\,\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ che lo fa muovere verso il basso.

La forza $\mathbf{F_m}$ fa muovere gli elettroni liberi verso il basso producendo una carica totale negativa nella parte inferiore della barretta e una uguale carica totale positiva nella parte superiore. La separazione di cariche genera un campo elettrico $\mathbf{E}$ che diventa via via più intenso con l'accumularsi delle cariche alle estremità della barretta. Il moto degli elettroni verso il basso continua finchè la forza $e\,\mathbf{E}$ (verticale e orientata verso l'alto) non eguaglia la forza magnetica. Quando le due forze si equilibrano si ha $e\,\mathbf{E} = e\,v\,B$; nella situazione di equilibrio l'intensità del campo elettrico è

$$E = vB$$

Quindi, la differenza di potenziale alle estremità della barretta , ossia la f.e.m indotta, è

$$\Delta V = E\,l = B\,l\,v$$

Esercizio 1.8

Esercizio 1.9

La f.e.m f nella bobina è uguale alla differenza di potenziale agli estremi della resistenza:

$$f = R\,i = (6,0\text{A}) \cdot (30\Omega) = 180\text{V}$$

Il flusso del campo magnetico attraverso la sezione A della bobina è

$$\Phi(\mathbf{B}) = n \cdot B \cdot A = 100\,\pi\,(0,05\,\text{m})^2 \cdot \text{B} = \ \pi \cdot 0,25\text{m}^2 \cdot \text{B}$$

La legge di Faraday afferma che il valore assoluto della f.e.m. indotta è uguale alla rapidità di variazione del flusso magnetico:

$$f = \frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt}$$

ossia

$$180\text{V} = \frac{\text{d}(\pi \cdot 0,25\text{m}^2 \cdot \text{B})}{\text{dt}} = \pi \cdot 0,25\text{m}^2 \frac{\text{dB}}{\text{dt}}$$

Quindi, per generare la corrente richiesta, la rapidità di variazione del campo magnetico deve essere

$$\frac{dB}{dt} = \frac{180\text{V}}{\pi \cdot 0,25\text{m}^2} = 229\ \text{T/s}$$

.

Esercizio 1.10

È possibile variare il flusso magnetico concatenato con il circuito in modi diversi:

1) avvicinando o allontanando la sorgente del flusso magnetico al circuito e viceversa, avvicinando o allontanando il circuito alla sorgente del flusso;

2) se il campo magnetico è generato da corrente, aumentando o diminuendo l'intensità di corrente oppure invertendo il verso di circolazione della corrente nel circuito;

3) aumentando o diminuendo l'area del circuito immerso in un campo magnetico uniforme.

Per la legge di Faraday, il valore assoluto della f.e.m indotta f è uguale alla rapidità con cui varia il flusso rispetto al tempo

$$f = \frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt}$$

f si misura in Volt, il flusso in $Weber$, la rapidità con cui varia il flusso rispetto al tempo in Weber al secondo; quindi

$$1\,\text{Wb/s} = 1\,\text{V}$$

Esercizio 1.11 La direzione del vettore induzione magnetica $\mathbf{B}$ è ortogonale al piano che contiene il circuito, quindi il flusso $\Phi(\mathbf{B})$ di $\mathbf{B}$ concatenato con il circuito è

$$\Phi(\mathbf{B}) = B\,S \tag{5.5}$$

Si ottiene

$$\begin{aligned} f_i &= \frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} && (\text{ legge di Faraday}) \\ &= \frac{d\,BS}{dt} && (\text{ uguaglianza } (5.5)\,) \\ &= S\,\frac{d\,B}{dt} && (S \text{ è costante nel tempo}) \end{aligned}$$

Quindi, la forza elettromotrice indotta è $f_i = (40 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}) \cdot (20 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m})\ (0,5\,\mathrm{T/s}) = 0,04\,\mathrm{V}$

Esercizio 1.12

1) Il conduttore PQ si muove di moto traslatorio uniforme; la sua velocità $\mathbf{v}$, il campo magnetico $\mathbf{B}$ e il conduttore sono ortogonali tra loro.

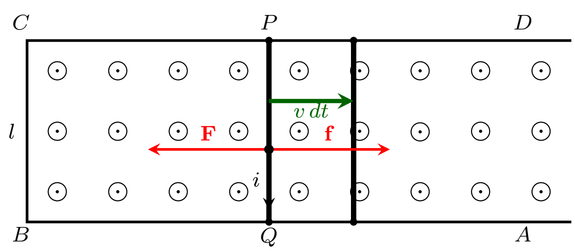

Figura 10: Il conduttore PQ, nell'intervallo di tempo dt, si sposta orizzontalmente del tratto $v\,dt$.

Se $A(t)$ è l'area delimitata dal circuito all'istante t, il flusso uscente da tale area è

$$\Phi(\mathbf{B}) = B\,A(t)$$

In un intervallino di tempo dt la barretta PQ si sposta verso destra di $v\,dt$, quindi l'area delimitata dal circuito aumenta di $dA = lvdt$. La variazione di flusso nell'intervallino dt è

$$d\Phi(\mathbf{B}) = B\,dA = Blv\,dt$$

ossia

$$\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = Blv$$

Per la legge di Faraday-Lenz, la forza elettromotrice indotta è

$$f_i = -\frac{\Phi(\mathbf{B})}{dt} = -Blv$$

essa coincide con la differenza di potenziale agli estremi del conduttore PQ. Il verso della corrente indotta i è quello orario, infatti il flusso di $\mathbf{B}$ attraverso il circuito è 'uscente' pertanto quello prodotto dal campo $\mathbf{B}_i$ (il campo magnetico generato dalla corrente indotta), deve essere entrante. Ciò si verifica se la corrente percorre il conduttore in senso orario.

Si noti che la forza elettromotrice indotta f_i è costante nel tempo perchè il moto di PQ è uniforme. Avendo inoltre trascurato il fenomeno di autoinduzione, anche la corrente i è costante. Si ottiene

$$i = \frac{|f_i|}{R} = \frac{Blv}{R}$$

2) Per determinare la potenza occorre prima trovare la forza che agisce sul conduttore PQ. Tale conduttore è lungo l, è percorso da corrente i ed è immerso nel campo magnetico $\mathbf{B}$; quindi esso risente di una forza $\mathbf{F}$ la cui intensità è

$$F = B\,i\,l = B\,\frac{Blv}{R}\,l$$

ossia[2]

$$F = \frac{B^2\,v\,l^2}{R}$$

La direzione di $\mathbf{F}$ è parallela a AD e ha verso opposto a quello di $\mathbf{v}$. Pertanto per mantenere il conduttore in moto con velocità costante $\mathbf{v}$ occorre applicare al conduttore la forza esterna $\mathbf{f}$ uguale e contraria a $\mathbf{F}$. Serve spendere la potenza meccanica

$$P_m = F\,v = \frac{B^2\,v^2\,l^2}{R}$$

Tale potenza meccanica è esattamente uguale alla potenza elettrica dissipata nel circuito per effetto Joule.

Le espressioni trovate per f_i, i e $\mathbf{F}$ in funzione della velocità non dipendono dal tipo di moto. Esse continuano a essere vere anche per velocità variabili. Quello descritto è il principio su cui si fonda la produzione della maggior parte di energia elettrica nel mondo.

Esercizio 1.13

Esercizio 1.14 Nel circuito si genera una corrente indotta perchè il circuito è immerso in un campo magnetico e una sua parte è mobile. Ciò genera una forza magnetica di intensità $F = Bil$.

L'equazione del moto della barretta è

$$m\,a = mg - Bil$$

ossia

[2] La forza F si chiama, di solito, *resistenza di attrito elettromagnetico*.

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{Bil}{m} \tag{5.6}$$

Con le stesse argomentazioni fatte per l'esercizio 1.12 si ricava che la forza elettromotrice indotta nel circuito è

$$|f_i| = Blv = Ri \tag{5.7}$$

Sostituendo l'uguaglianza (5.7) in (5.6) si ottiene

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{B^2 l^2}{mR}\, v$$

La velocità della barretta è

$$v(t) = \frac{mgR}{B^2 l^2}\left(1 - e^{-\frac{B^2 l^2}{mR}\, t}\right)$$

Per t che tende a $+\infty$ la velocità tende al valore limite $v = \dfrac{mgR}{B^2 l^2}$. In altri termini, la corrente tende a un valore limite e la corrispondente forza magnetica eguaglia in modulo la forza peso. Il moto della barretta diventa uniforme, esattamente come avviene nella caduta di un corpo in un mezzo viscoso.

Esercizio 2.1 $L = 1,0 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{H}$

Esercizio 2.2
Da $f_i = -\dfrac{\Delta\Phi(\mathbf{B})}{\Delta t} = -L\dfrac{\Delta i}{\Delta t}$ si ricava:

$$f_i = -L\frac{\Delta i}{\Delta t} = -3,5 \cdot 10^{-5}\,\frac{1,4\,\mathrm{A}}{0,060\,\mathrm{s}} = 8,17 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{V}$$

Esercizio 2.3 Innanzi tutto occorre ricordare che la permeabilità magnetica relativa (μ_r) è il rapporto tra la permeabilità magnetica (μ) di un certo materiale e la permeabilità nel vuoto (μ_0)

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$$

μ_r è un numero puro.

Esercizio 2.4 $f_i = -69\,\mathrm{mV}$

Esercizio 3.1 Si veda il libro di testo e gli appunti in rete.

Esercizio 3.2

1. Il conduttore mobile PQ si muove di moto armonico. Rispetto al sistema di riferimento formato dall'asse s passante per B e A, con origine in B e verso da sinistra a destra, la legge oraria del moto del conduttore mobile è

$$s(t) = d + a\cos(\omega t), \qquad t \geq 0 \tag{5.8}$$

dove $\omega = 2\pi f = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ è la *pulsazione* e f la *frequenza* dell'oscillatore.

Per determinare la sua velocità in funzione del tempo basta calcolare la derivata prima di s rispetto al tempo, cioè

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = -a\omega\sin(\omega t) \tag{5.9}$$

2. Dall'uguaglianza $2\pi f = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ si ricava

$$k = 4\pi^2 f^2 m = 4\pi^2\, 50,0^2 \cdot (2,0 \cdot 10^{-2})\,\mathrm{N/m} \sim 2000\,\mathrm{N/m}$$

3. Se $A(t)$ è l'area delimitata dal circuito all'istante t, il flusso uscente da tale area è

$$\Phi(\mathbf{B}) = B\,A(t)$$

In un intervallino di tempo dt la barretta PQ si sposta di un tratto pari a $v\,dt$, l'area delimitata dal circuito varia di $dA = lvdt$. Quindi la variazione di flusso nell'intervallino dt è

$$d\Phi(\mathbf{B}) = B\,dA = Blv\,dt$$

ossia

$$\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = Blv$$

Per la legge di Faraday-Lenz, la differenza di potenziale $V_P - V_Q$ è

$$V_P - V_Q = f_i = -\frac{\Phi(\mathbf{B})}{dt} = -Blv$$

Si poteva giungere alla stessa conclusione, utilizzando i risultati trovati al quesito 1: il vettore induzione magnetica $\mathbf{B}$ (uniforme e costante) è ortogonale al piano contenente il circuito. Pertanto il flusso, in funzione del tempo t, è dato da

$$\Phi(t) = Bl\,s(t) = Bl\,(d + a\cos(\omega t)) \tag{5.10}$$

Per la legge di Fraday-Neumann-Lenz, la differenza di potenziale agli estremi del conduttore è

$$V_P - V_Q = f_i = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = Bla\omega\,\sin(\omega t) = -Bl\,v \tag{5.11}$$

Il valore massimo della velocità si ottiene quando $sin(\omega t) = 1$. Pertanto il valore massimo della differenza di potenziale agli estremi del conduttore mobile PQ è

$$Bla\omega = Bla\,2\pi f = 0,3 \cdot (1,0 \cdot 10^{-1}) \cdot (1,0 \cdot 10^{-2}) \cdot 2\pi \cdot 50\,\mathrm{V} = 94\,\mathrm{mV}$$

Il valore trovato è molto piccolo e non permetterebbe di far funzionare nessuno dei dispositivi normalmente presenti nelle nostre case (immaginando una resistenza di $1\,\Omega$ si otterrebbe una potenza minore di $5\,\mathrm{mW}$). [3]

4. Alla chiusura del circuito la forza elettomotrice indotta $f_i = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = -Bl\,v$ produce nel circuito una corrente di intensità $i = \frac{f_i}{R} = -\frac{Bl\,v}{R}$.

   Durante il primo semiperiodo il flusso $\Phi(\mathbf{B})$ diminuisce: $\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} < 0$ e $f_i > 0$. Quindi la corrente circola in senso antiorario. Nel secondo semiperiodo il flusso $\Phi(\mathbf{B})$ cresce, $\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} > 0$ e la corrente circola in senso orario.

   Al passaggio di corrente nel circuito, sul conduttore mobile PQ, agiscono due forze: la forza di richiamo della molla e la forza magnetica

   $$\mathbf{F}_m = i\,\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

   La direzione di $\mathbf{F}_m$ è perpendicolare sia a $\mathbf{l}$ che a $\mathbf{B}$ mentre il suo verso va, durante il primo semiperiodo, da sinistra verso destra; durante il secondo semiperiodo, da destra verso sinistra. In entrambi i casi tale forza esercita sul conduttore un ruolo "frenante" che giustifica il suo moto armonico smorzato.

5. All'istante $t = 0$ il sistema viene 'caricato' mettendo in tensione la molla. L'energia $\mathcal{E}_0$ del dispositivo coincide con l'energia potenziale della molla

   $$\mathcal{E}_0 = \frac{1}{2}ka^2 = 99\,\mathrm{mJ}$$

   Durante il moto, diciamo durante il primo semiperiodo, il lavoro compiuto dalla forza elastica fornisce al dispositivo energia cinetica $\mathcal{E}_c$ e energia elettrica $\mathcal{E}_{el}$

   $$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_{el}$$

   l'energia elettrica $\mathcal{E}_{el}$ viene dissipata per effetto Joule ma potrebbe anche essere utilizzata per far funzionare qualche dispositivo elettrico. In ogni caso l'energia totale disponibile è di $99\,\mathrm{mJ}$ e tale valore rappresenta la quantità di energia che viene erogata dal sistema prima del suo arresto definitivo.

[3] Per un'analisi critica del problema 1 (e della relativa soluzione) proposto dal MIUR, si veda l'articolo a cura di Silvano Sgrignoli in *La Fisica nella Scuola, XLVIII, 2015.*

Esercizio 4.1 La legge di Ampere afferma che:

in un campo magnetico generato da un filo di forma qualsiasi percorso da corrente stazionaria i la circuitazione di $\mathbf{B}$ *lungo una qualunque linea* γ*, chiusa, orientata e concatenata con il filo, vale* $\mu_0\, i$. Ossia

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0\, i \tag{5.12}$$

Anzitutto occorre precisare cosa si intende per *curva concatenata con il filo.* Sono possibili due definizioni

Prima definizione. Si dice che la curva γ è *concatenata con il filo* se *ogni* superficie S di bordo γ interseca il filo; viceversa si dice che γ *non è concatenata con il filo* se esiste una superficie S di bordo γ che non interseca il filo.

Seconda definizione. Si dice che la curva γ è *concatenata con il filo* se *ogni* deformazione continua che riduce la curva γ a un punto interseca il filo conduttore almeno una volta; viceversa si dice che γ *non è concatenata con il filo* se esiste una deformazione continua che riduce la curva γ a un punto senza mai intersecare il filo.

Fatta questa precisazione ci si chiede cosa succede nel caso di correnti variabili nel tempo: vale ancora la legge di Ampere?

Il caso di un condensatore durante la fase di carica.

Si consideri il condensatore schematizzato in figura: durante la fase di carica nei fili conduttori scorre corrente variabile nel tempo: essa passa da un valore massimo, quando le due armature sono scariche, fino ad annullarsi, quando le armature sono completamente cariche. Da questo momento in poi, cioè da quando le armature sono completamente cariche, non vi è più alcun passaggio di corrente.

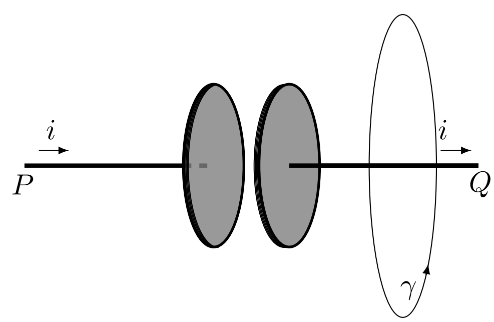

Figura 11: Il caso di un condensatore durante la fase di carica.

Si consideri ora (figura 11) la circonferenza γ avente centro sul filo e raggio r. Per quanto si è detto sopra la circonferenza *non* è concatenata con il filo: infatti, per esempio, la superficie S a forma di "tazza" avente per bordo γ (si veda la figura 12) non interseca il filo conduttore.

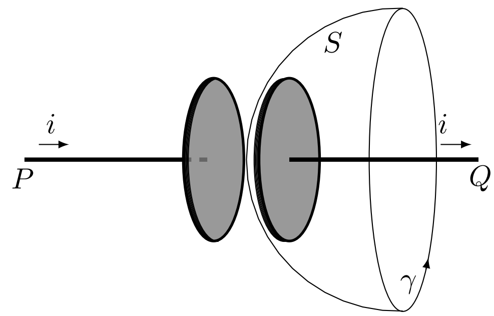

Figura 12: La superficie S avente per bordo γ non interseca il filo conduttore, quindi la circonferenza γ non è concatenata con il filo.

Ora, se in un dato istante t della fase di carica del condensatore, si vuole calcolare la circuitazione di $\mathbf{B}$ lungo γ, dalla legge di Ampere si ottiene

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i = 0 \tag{5.13}$$

Tuttavia, nel medesimo istante di tempo, attorno ai fili del condesatore si è generato un campo magnetico $\mathbf{B}$: in ogni punto di γ esso avrà intensità $B \neq 0$, direzione tangente alla circonferenza e verso stabilito dalla regola della mano destra. Segue che, al tempo t, la circuitazione di $\mathbf{B}$ vale

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r\, B \neq 0 \tag{5.14}$$

Confrontando le uguaglianze (5.13), (5.14) è immediato accorgersi che si è giunti a una contraddizione. Le "vie d'uscita" sono due : limitare la validità della legge di Ampere al caso di correnti stazionarie, oppure (e questa è la via seguita da Maxwell) modificare la legge in modo che essa risulti valida anche nel caso di correnti variabili.

Esercizio 4.2 Si analizzi ancora una volta il caso di un condensatore durante la fase di carica. Durante questo intervallo di tempo non vi è passaggio di corrente tra le due armature, nonostante ciò tra di esse è presente un campo elettrico variabile nel tempo le cui linee di campo vanno dall'armatura su cui si stanno accumulando le cariche positive a quella su cui si stanno accumulando le cariche negative (il campo elettrico è nullo nello spazio al di fuori delle armature). Pertanto si ha una variazione di flusso del campo elettrico $\mathbf{E}$. Maxwell allora ipotizzò che, così come la variazione di flusso di un campo magnetico produce un campo elettrico (legge di Faraday-Neumann), anche la variazione di flusso di un campo elettrico deve produrre un campo magnetico.

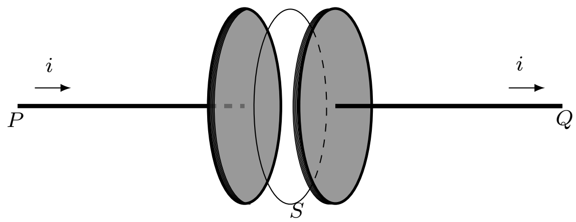

Figura 13:

All'istante t (durante la fase di carica del condensatore) il flusso di $\mathbf{E}$ attraverso il disco di area S rappresentato in figura è $\Phi(\mathbf{E}) = E\,S = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\,S$, dove $\sigma(t) = \dfrac{Q(t)}{S}$ è la densità superficiale di carica sulle due armature. Si ottiene

$$\Phi(\mathbf{E}) = E\,S = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0} \tag{5.15}$$

Differenziando i due termini della precedente uguaglianza si ricava

$$\frac{d\Phi(\mathbf{E})}{dt} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{dQ(t)}{dt} \tag{5.16}$$

Maxwell chiamò la quantità $i_s = \frac{dQ(t)}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\mathbf{E})}{dt}$ *corrente di spostamento*; egli dimostrò che la legge di Ampere

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i \tag{5.17}$$

si poteva generalizzare sostituendo i con la somma della corrente di conduzione i e della corrente di spostamento i_s:

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mu_0(i + i_s) = \mu_0 i + \mu_0\varepsilon_0 \frac{d\Phi(\mathbf{E})}{dt} \tag{5.18}$$

L'uguaglianza (5.18) si chiama *legge di Ampere-Maxwell*.

In altri termini, Maxwell ipotizzò che dovesse valere una legge analoga a quella di Faraday-Neumann-Lenz

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} \tag{5.19}$$

dove $\mathbf{B}$ e $\mathbf{E}$ hanno ruoli scambiati. Egli verificò che

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mu_0\varepsilon_0\,\frac{d\Phi(\mathbf{E})}{dt} \tag{5.20}$$

Il termine a destra del segno di uguaglianza si chiama *corrente di spostamento*; esso è il correttivo che bisogna introdurre nella legge di Ampere affinchè essa resti valida anche nel caso di correnti variabili nel tempo. La legge

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\mathbf{E})}{dt} \tag{5.21}$$

si chiama *legge di Ampere-Maxwell.*

Il risultato ottenuto da Maxwell è di fondamentale importanza, non tanto per il fatto di aver risolto un paradosso, ma perchè il suo risultato permise di prevedere l'esistenza delle onde elettromagnetiche. Solo qualche decennio più tardi Hertz realizzò alcuni famosi esperimenti che ne confermarono l'esistenza.

Esercizio 4.3 Durante la fase di carica del condensatore, diciamo al tempo t, il campo elettrico $\mathbf{E}$ ha direzione perpendicolare alle armature, verso che va dall'armatura 'positiva' a quella 'negativa' e intensità $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$, dove σ è la densità superficiale di carica su ciascuna armatura. Sia $\mathcal{P}$ un piano tra le due armature e parallelo ad esse. Il flusso attraverso $\mathcal{P}$ è

$$\Phi_{\mathcal{P}}(\mathbf{E}) = \pi R^2\, E = \pi R^2\, \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0} \tag{5.22}$$

Quindi, l'intensità della corrente di spostamento è

$$i_s = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_{\mathcal{P}}(\mathbf{E})}{dt} = \frac{dQ}{dt} = 1,8\,\mathrm{A} \tag{5.23}$$

Esercizio 4.4 Sia S un disco posizionato tra le due armature del condensatore, con centro sull'asse delle armature e raggio r (fare una figura). La circuitazione di $\mathbf{B}$ lungo la circonferenza γ che delimita S è

$$\int_\gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r\, B$$

Poichè tra le armature non c'è corrente di conduzione ($i = 0$) la quarta equazione di Maxwell assume la forma seguente

$$2\pi r\, B = \mu_0\, i_s = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_S(\mathbf{E})}{dt} \tag{5.24}$$

Inoltre: $E = \dfrac{Q}{\varepsilon_0 \pi R^2}$, $\quad \Phi_S(\mathbf{E}) = \dfrac{Q}{\varepsilon_0 \pi R^2}\, \pi r^2 = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}\, \dfrac{r^2}{R^2}$, $\quad \dfrac{d\Phi_S(\mathbf{E})}{dt} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\, \dfrac{r^2}{R^2} \dfrac{dQ}{dt}$ e infine

$$\varepsilon_0 \frac{d\Phi_S(\mathbf{E})}{dt} = \frac{r^2}{R^2}\, \frac{dQ}{dt} \tag{5.25}$$

Sostituendo (5.25) in (5.24) si ottiene:

$$2\pi r\, B = \mu_0\, \frac{r^2}{R^2}\, i \tag{5.26}$$

ossia

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{r}{R^2}\,i \tag{5.27}$$

Nel caso in esame si ha

$$B = 2\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m/A}\ \frac{0,03\ \mathrm{m}}{(0,05\ \mathrm{m})^2}\ 4,5\ \mathrm{A} = 3,39 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{T}$$

Esercizio 4.5 La corrente i che circola nella spira raddoppia. La forza F applicata alla spira è proporzionale sia a i che a B; poichè entrambe raddoppiano la forza sarà quattro volte maggiore.

Esercizio 4.6 Il flusso di campo magnetico attraverso una sezione S (ortogonale) del solenoide è

$$\Phi(\mathbf{B}) = B\,S = 4,0 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{T} \cdot (2,0 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} \cdot 3,0 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}) = 2,4 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{Wb} \tag{5.28}$$

La forza elettromotrice indotta in una spira è $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{2,4 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{Wb}}{10^{-3}\,\mathrm{s}} = 2,4 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{V}$. Per determinare la forza elettromotrice nel solenoide bisogna moltiplicare questo valore per il numero di spire

$$f_i = 5 \cdot 2,4 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{V} = 1,2 \cdot 10^{-1}\,\mathrm{V} \tag{5.29}$$