

# Magnetostatica

Mauro Saita

e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Versione provvisoria. Novembre 2017.

## Indice

<b>1</b>	<b>Magnetismo</b>	<b>2</b>
1.1	Forza magnetica e vettore induzione magnetica. . . . .	3
1.2	Esperimento di Ørsted (1820) . . . . .	4
1.3	Induzione magnetica generata da un filo rettilineo infinito. Legge di Biot-Savart. . . . .	5
1.4	Induzione magnetica generata da una spira . . . . .	6
1.5	Induzione magnetica generata da un solenoide . . . . .	7
1.6	Azioni meccaniche esercitate da un campo magnetico su correnti elettriche . . . . .	8
1.6.1	Forza agente su un filo percorso da corrente . . . . .	8
1.6.2	Forze agenti tra due fili rettilinei percorsi da corrente . . . . .	8
1.7	Legge di Ampere (1826) . . . . .	10
1.7.1	Circuitazione di campo magnetico . . . . .	10
1.7.2	Campi magnetici generati da circuiti . . . . .	10
1.7.3	Dimostrazione della legge di Ampère nel caso di un solo filo rettilineo . . . . .	12
1.7.4	Campo magnetico nei punti interni di un solenoide . . . . .	14
1.8	Non conservatività del campo magnetico . . . . .	15
1.9	Equazioni di Maxwell per campi elettrici e magnetici stazionari. . . . .	17

---

<sup>1</sup>Nome file: 'campo\_magnetico.tex'

# 1 Magnetismo

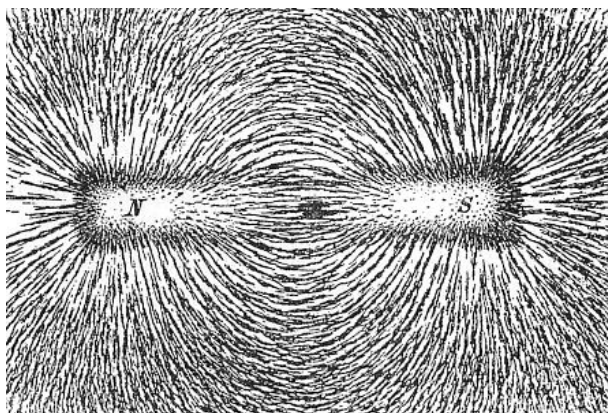
Alcuni minerali come ad esempio la magnetite ( $Fe_3O_4$ ) sono capaci di attrarre piccoli oggetti di ferro. Le calamite di uso più comune sono fatte di questi materiali e le forze che esercitano su sostanze ferrose si chiamano *forze elettromagnetiche*. Le sorgenti di tali forze sono localizzate nelle estremità della calamita, i *poli magnetici*, a loro volta distinti in *polo sud* e *polo nord*. Il motivo di questa denominazione sta nel fatto che la Terra si comporta come una grande calamita i cui poli coincidono sostanzialmente con i poli geografici.

In un ago magnetico si chiama polo nord quello che si orienta in direzione del polo nord terrestre e polo sud quello che si orienta in direzione del polo sud terrestre. Con questa convenzione al polo nord geografico della terra è associato un polo sud magnetico e viceversa.

Le calamite, oltre alla proprietà di attrarre alcune sostanze, esercitano l'una sull'altra forze attrattive o repulsive a seconda della disposizione dei loro poli.

L'esistenza di forze magnetiche giustifica l'introduzione di un nuovo campo vettoriale: il campo magnetico, di solito indicato con  $\mathbf{B}$ . Campo elettrostatico e campo magnetico si comportano in modo diverso e ciò è dovuto principalmente al fatto che mentre in un campo elettrico è possibile considerare cariche elettriche positive separate da quelle negative, in un campo magnetico non è possibile isolare un singolo polo. Se ad esempio si spezza una barretta magnetica si ottengono due barrette più piccole ciascuna delle quali possiede un polo nord e un polo sud magnetico. Il campo generato da una calamita è simile a quello generato da un dipolo elettrico: le sue linee di forza sono linee chiuse e pertanto il flusso uscente da una qualsiasi superficie chiusa è sempre nullo.

L'esistenza di un campo magnetico in un determinato punto dello spazio può essere verificata in modo semplice utilizzando una bussola: se nelle vicinanze di quel punto non vi sono magneti o correnti l'ago si posiziona lungo la direzione indicante il polo nord terrestre (polo sud magnetico), altrimenti l'ago ruota fino a orientarsi secondo la risultante del campo magnetico terrestre e dei campi magnetici generati da altri magneti e correnti. In ogni caso l'ago magnetico della bussola si dispone sempre lungo la tangente alla linea di forza del campo magnetico che passa per quel punto.



**Figura 1:** Linee di campo magnetico generate da un magnete.

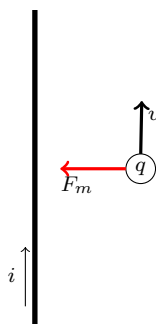
## 1.1 Forza magnetica e vettore induzione magnetica.

La legge di Coulomb è la legge fondamentale dell'elettrostatica. Due cariche ferme  $q_1$  e  $q_2$  sono soggette all'azione di forze dovute al fatto che ognuna delle due cariche è immersa nel campo magnetico generato dall'altra. Su ognuna delle due cariche agisce una forza elettrostatica  $F_e$  direttamente proporzionale al prodotto di  $q_1$  per  $q_2$  e inversamente proporzionale al quadrato  $r^2$  della loro distanza

$$F_e \propto \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

La direzione di  $\mathbf{F}_e$  è quella della retta congiungente  $q_1$  e  $q_2$  mentre il verso dipende dal segno delle due cariche. La legge di Coulomb è valida quando le cariche sono *ferme*.

*Che cosa succede se le cariche si muovono?* Per quanto possa sembrare sorprendente, compare una nuova forza. Si consideri ad esempio il caso di una carica (positiva)  $q$  che si muove con velocità  $\mathbf{v}$  nelle vicinanze di un filo di rame percorso da corrente (figura 2).



**Figura 2:** Un filo di rame percorso da corrente genera un campo magnetico. La carica  $q$  (positiva), posta vicino al filo, possiede velocità  $\mathbf{v}$ .

Se la carica totale sul filo è nulla allora è nullo anche il campo elettrico agente su  $q$  e di conseguenza, secondo la legge di Coulomb, sulla carica  $q$  non dovrebbe agire alcuna forza. Questa previsione è smantata da semplici osservazioni sperimentali. La carica  $q$  risente infatti di una nuova forza  $F_m$  detta *forza magnetica* che è direttamente proporzionale alla corrente  $i$  che scorre nel filo e alla velocità della carica stessa. Più precisamente si ha

$$F_m \propto \frac{q v i}{r}$$

dove  $r$  è la distanza della carica dal filo.

In generale la forza  $\mathbf{F}$  agente su una carica  $q$  è la risultante di due forze

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m$$

dove  $\mathbf{F}_e$  è la forza coulombiana dipendente dalla posizione in cui si trova la carica e dalla presenza in quel punto di un eventuale campo elettrico mentre  $\mathbf{F}_m$  è la forza magnetica dipendente dalla velocità della carica e dalla presenza in quel punto di un eventuale campo magnetico.

Più in generale, per quanto riguarda la forza magnetica, si osserva sperimentalmente quanto segue

se  $q$  è una carica elettrica che si muove in un campo magnetico con velocità  $\mathbf{v}$  e se tale carica non è influenzata da altri campi vettoriali (per esempio di natura elettrica o meccanica) allora su di essa agisce una forza  $\mathbf{F}_m$  con le seguenti proprietà

1. la componente di  $\mathbf{F}_m$  nella direzione di  $\mathbf{v}$  è sempre nulla;
2. la componente di  $\mathbf{F}_m$  risulta massima lungo una ben determinata direzione perpendicolare a  $\mathbf{v}$ ;
3. l'intensità di  $\mathbf{F}_m$  è proporzionale alla carica  $q$  e al modulo della velocità  $\mathbf{v}$ .

Queste osservazioni sperimentali giustificano la seguente definizione

**Definizione 1.1.** *Se  $q$  è una carica in moto con velocità  $\mathbf{v}$  si chiama vettore induzione magnetica  $\mathbf{B}$  il vettore per il quale risulta*

$$\mathbf{F}_m = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (1.1)$$

L'unità di misura nel S.I. del vettore induzione magnetica è il tesla (simbolo T)

$$1 \text{ T} = \frac{1 \cdot \text{Newton}}{1 \text{ Ampere} \cdot 1 \text{ metro}} = \frac{1 \cdot \text{N}}{1 \text{ A} \cdot 1 \text{ m}}$$

Se nella regione di spazio in cui si trova la carica  $q$  esiste, oltre al campo magnetico, anche un campo elettrico (dovuto per esempio alla presenza di altre cariche statiche) allora la forza  $\mathbf{F}$  agente sulla carica è data dalla somma vettoriale della *forza elettrica*  $q\mathbf{E}$  e della *forza magnetica*  $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.2)$$

La forza elettromagnetica  $\mathbf{F}$  è detta *forza di Lorentz*. Pertanto, in presenza di campo elettrico e magnetico, la forza agente su una carica dipende dalla sua posizione e dalla velocità con cui si sta muovendo.

Nei paragrafi successivi si analizzano due diverse categorie di fenomeni legati all'esistenza del solo campo magnetico ( $\mathbf{E} = 0$ ): la prima ha lo scopo di descrivere i campi magnetici generati da correnti elettriche mentre la seconda è finalizzata allo studio delle forze meccaniche che un campo magnetico esercita su cariche in movimento.

## 1.2 Esperimento di Ørsted (1820)

Il fisico danese Hans Christian Ørsted, in un celebre esperimento che segnò l'inizio della teoria moderna del magnetismo, scoprì che una corrente elettrica fa deviare un ago magnetico posto nelle sue vicinanze. Questo semplice fatto sperimentale fu il primo di una lunga serie di scoperte che permisero di dimostrare che *un campo magnetico è sempre determinato da cariche elettriche in movimento*<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Il campo magnetico terrestre, quello che orienta la bussola, è dovuto ai movimenti di masse magmatiche che risultano elettricamente cariche per le elevatissime pressioni e temperature presenti nel nucleo della Terra.

### 1.3 Induzione magnetica generata da un filo rettilineo infinito. Legge di Biot-Savart.

I fisici francesi Jean-Baptiste Biot e Félix Savart negli anni (1820-1824) determinarono sperimentalmente il campo  $\mathbf{B}$  generato da un filo rettilineo infinito percorso da corrente stazionaria<sup>3</sup>. Essi misurarono le deviazioni subite da un ago magnetico posto nelle vicinanze del filo. Se  $P$  è un punto che si trova a distanza  $r$  dal filo in cui fluisce una corrente stazionaria pari a  $i$  allora il vettore induzione magnetica  $\mathbf{B}$  è così definito:

- $\mathbf{B}$  appartiene al piano  $\pi$  passante per  $P$  e ortogonale al filo; la sua direzione è quella della retta tangente alla circonferenza di centro  $O$  e raggio  $r$ .

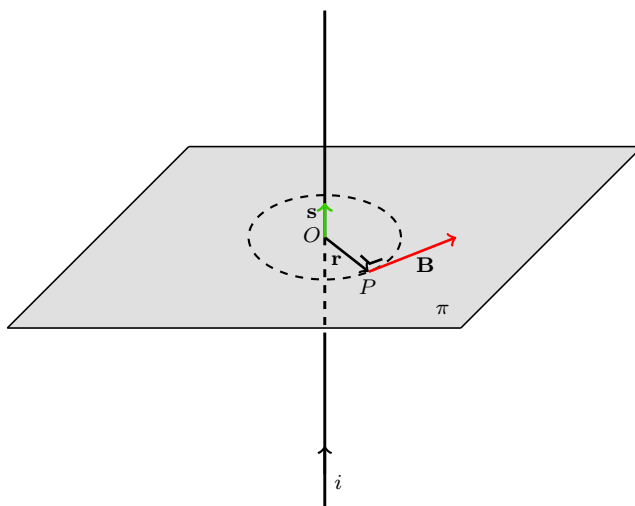
- Il verso di  $\mathbf{B}$  si determina usando la “regola della mano destra” nel seguente modo: posizionando il pollice secondo la direzione e il verso della corrente  $i$ , il verso di  $\mathbf{B}$  è concorde con il senso di avvolgimento delle altre quattro dita della mano.

- L'intensità di  $\mathbf{B}$  è

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \quad (1.3)$$

La costante  $\mu_0$  si chiama *permeabilità magnetica del vuoto*

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \frac{\text{m}}{\text{A}} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \quad (1.4)$$



**Figura 3:** Campo magnetico generato da un filo percorso da corrente stazionaria. La linea di campo magnetico passante per  $P$  è la circonferenza che giace nel piano perpendicolare al filo con centro sul filo stesso.

Il vettore induzione magnetica è completamente definito dalla seguente uguaglianza vettoriale

---

Anche il campo magnetico di un magnete naturale o artificiale è riconducibile ai moti ordinati degli elettroni atomici di particolari sostanze.

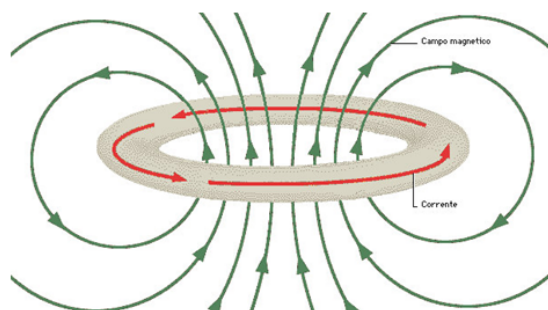
<sup>3</sup>Ogni circuito elettrico percorso da corrente stazionaria deve necessariamente essere chiuso. Si schematizzi il filo conduttore con un rettangolo e ci si ponga a distanza  $r$  da uno dei suoi lati; se tale distanza è molto minore rispetto alla lunghezza del lato, si può considerare con buona approssimazione il conduttore percorso da corrente come un filo rettilineo infinito.

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^2} \quad (1.5)$$

dove  $\mathbf{s}$  è il versore applicato in  $O$  con direzione e verso coincidenti con quelli della corrente e  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ .

#### 1.4 Induzione magnetica generata da una spira

In una spira circolare di raggio  $R$  percorsa da corrente stazionaria  $i$  le linee di forza del campo magnetico  $\mathbf{B}$  sono linee di campo chiuse, concatenate con la spira e appartenenti a piani ortogonali rispetto a quello della spira.



**Figura 4:** Le linee di forza del campo magnetico generato da una spira percorsa da corrente sono linee chiuse (quelle di colore verde), perpendicolari al piano che contiene la spira stessa.

Nel centro  $O$  l'intensità del campo magnetico vale

$$B = \frac{\mu_0 i}{2R} \quad (1.6)$$

la direzione è ortogonale al piano contenente la spira e il verso coincidente con quello di un osservatore che vede ruotare la corrente in senso antiorario.

In un punto dell'asse della spira che si trova a distanza  $r$  dal centro  $O$  l'intensità del campo magnetico è

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 i}{(r^2 + R^2)^{3/2}} \quad (1.7)$$

A grandi distanze dalla spira, cioè per  $r \gg R$  nel termine  $(r^2 + R^2)^{3/2}$  si può, con buona approssimazione, trascurare il termine  $R^2$ . Allora da (1.7), si ottiene l'intensità del campo elettrico in un punto dell'asse della spira a grande distanza dal suo centro

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 i}{r^3} \quad (1.8)$$

**Osservazione.** Il campo generato da una piccola spira è molto simile a quello generato da un ago magnetico a essa perpendicolare e che rivolga il nord verso l'osservatore che vede la corrente circolare in senso antiorario.

## 1.5 Induzione magnetica generata da un solenoide

Un solenoide rettilineo (o bobina) è costituito da un'elica cilindrica di filo conduttore.

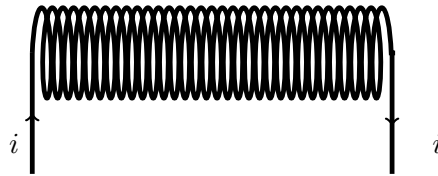


Figura 5: Solenoide.

Si suppone che la lunghezza del solenoide sia molto maggiore del raggio delle spire (solenoido infinito), che sia costante il numero  $n$  di spire per unità di lunghezza (avvolgimento uniforme) e infine che le spire siano così ravvicinate da costituire una successione compatta. In queste ipotesi il solenoide si comporta come se fosse formato da tante spire piane tra loro parallele e tutte percorse dalla stessa corrente.

Osservando la figura qui sotto si può notare che all'interno del solenoide (nei punti lontani dalle sue estremità) le linee di campo sono equidistanziate, rettilinee e parallele all'asse del solenoide. Ciò significa che in tali punti il vettore induzione magnetica è praticamente uniforme.

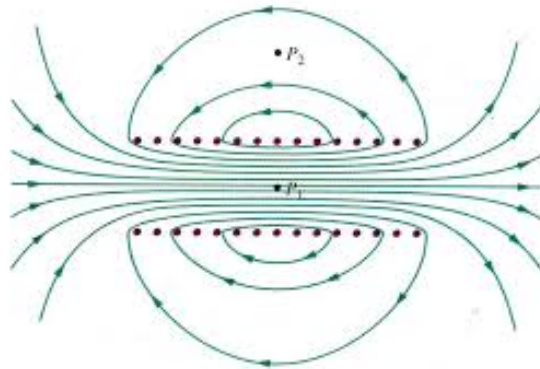


Figura 6: Linee di campo di un solenoide.

In seguito, utilizzando la legge di Ampere, si mostrerà che l'intensità di  $\mathbf{B}$  all'interno del solenoide è

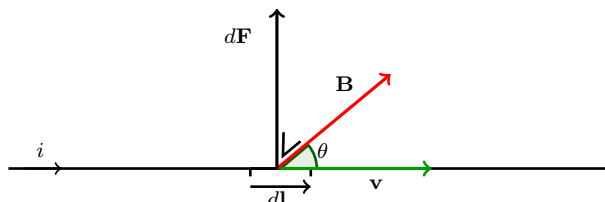
$$B = \frac{N}{L} \mu_0 i \quad (1.9)$$

Esso è diretto come l'asse del solenoide e ha verso concorde con quello della corrente. Si noti che  $\mathbf{B}$  non dipende dal raggio delle spire. Infine, nei punti esterni al solenoide il vettore induzione magnetica risulta essere molto piccolo e in molte situazioni il suo valore è trascurabile.

## 1.6 Azioni meccaniche esercitate da un campo magnetico su correnti elettriche

### 1.6.1 Forza agente su un filo percorso da corrente

Si consideri un filo metallico rettilineo di lunghezza  $l$  percorso da una corrente stazionaria  $i$  posto in un campo magnetico  $\mathbf{B}$  uniforme.



**Figura 7:** Forza esercitata dal campo magnetico  $\mathbf{B}$  sul filo percorso da corrente stazionaria.

In un intervallino di tempo  $dt$  la carica  $dq = i dt$  attraversa un elemento  $d\mathbf{l}$  di filo la cui lunghezza è  $dl = v dt$ . La forza di Lorentz esercitata dal campo magnetico  $\mathbf{B}$  sul tratto di filo  $d\mathbf{l}$  è

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= dq \mathbf{v} \times \mathbf{B} \\ &= i dt \frac{d\mathbf{l}}{dt} \times \mathbf{B} \\ &= i d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \end{aligned} \quad (1.10)$$

L'uguaglianza  $d\mathbf{F} = i d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$  si chiama *seconda legge di Laplace*.

Per calcolare la forza complessiva che il campo magnetico esercita sul filo di lunghezza  $l$  bisogna sommare tutte le forze agenti su ogni tratto di filo  $d\mathbf{l}$ . Si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int_l d\mathbf{F} \\ &= \int_l i d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \\ &= i \mathbf{l} \times \mathbf{B} \end{aligned} \quad (1.11)$$

L'uguaglianza  $\mathbf{F} = i \mathbf{l} \times \mathbf{B}$  dice tra l'altro che la forza esercitata sul filo è dovuta alla presenza del campo magnetico non dipende dalla quantità di carica trasportata da ogni singola particella, nè dal suo segno.

### 1.6.2 Forze agenti tra due fili rettilinei percorsi da corrente

Siano  $a$  e  $b$  due fili rettilinei paralleli posti a distanza  $d$  l'uno dall'altro. Il filo  $a$  è percorso dalla corrente  $i_a$ , il filo  $b$  dalla corrente  $i_b$ . L'intensità del campo magnetico generato dalla corrente  $i_a$  nei punti lungo il filo  $b$  si trova utilizzando la legge di Biot-Savart

$$B_a = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_a}{d} \quad (1.12)$$



Ora, la forza esercitata dal campo  $\mathbf{B}_a$  sul tratto di filo  $b$  di lunghezza  $l$  è (si veda l'uguaglianza 1.11)

$$F = i_b l B_a \quad (1.13)$$

Infine, sostituendo l'uguaglianza 1.12 in 1.13 si ottiene

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_a i_b}{d} l \quad (1.14)$$

## 1.7 Legge di Ampere (1826)

### 1.7.1 Circuitazione di campo magnetico

Sia  $\gamma$  una curva chiusa orientata . Con il termine *circuitazione di  $\mathbf{B}$  lungo  $\gamma$*  si intende il “lavoro” compiuto da  $\mathbf{B}$  lungo la curva orientata  $\gamma^4$ .

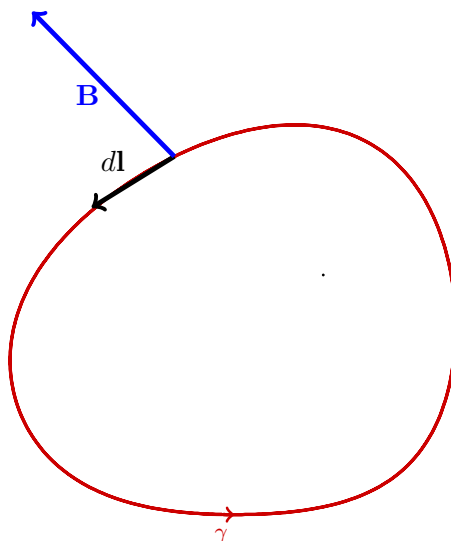


Figura 8: Circuitazione di  $\mathbf{B}$  lungo la linea chiusa  $\gamma$

Per calcolare la circuitazione di  $\mathbf{B}$  lungo  $\gamma$  bisogna prima calcolare il “lavoro” elementare  $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$  compiuto dal campo magnetico lungo un tratto infinitesimo di curva  $d\mathbf{l}$  e poi fare la somma dei lavori elementari relativi a tutti i trattini  $d\mathbf{l}$  che costituiscono la curva. Si ottiene

$$\text{Circuitazione di } \mathbf{B} \text{ lungo } \gamma = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

Il simbolo (integrale) “ $\oint$ ” indica la somma di tutti i lavori elementari, il cerchio sulla  $S$  stilizzata di somma sta a indicare che la somma è estesa a una curva chiusa. La circuitazione di campo magnetico ha dimensioni [campo magnetico \* lunghezza], quindi si misura in “Tesla per metro”:  $\text{T} \cdot \text{m}$ .

### 1.7.2 Campi magnetici generati da circuiti

Se il campo magnetico è stato generato da circuiti percorsi da corrente la legge di Ampère permette di trovare la circuitazione osservando semplicemente come sono disposte le correnti rispetto alla curva orientata  $\gamma$  lungo la quale si calcola la circuitazione. L’importanza del teorema di Ampère nel magnetismo è analogo a quello del teorema di Gauss in elettrostatica; in molti casi infatti, si utilizza la legge di Ampere per calcolare l’intensità del campo magnetico così come in elettrostatica si utilizzava il teorema di Gauss per trovare il campo elettrico. L’enunciato della legge di Ampère è il seguente

<sup>4</sup>Il termine lavoro è improprio perchè  $\mathbf{B}$  non è una forza.

**Teorema 1.2 (Legge di Ampère).** Sia  $\mathbf{B}$  un campo magnetico generato da uno più circuiti percorsi da corrente. La circuitazione di  $\mathbf{B}$  lungo una qualunque linea chiusa orientata  $\gamma$  è uguale al prodotto di  $\mu_0$  per la somma algebrica delle correnti concatenate con  $\gamma$ .

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \Sigma i \quad (1.15)$$

Se la curva  $\gamma$  non è concatenata con le correnti che generano  $\mathbf{B}$  la circuitazione è nulla

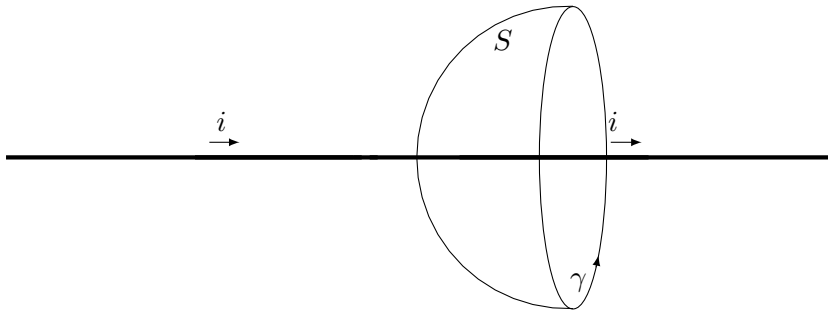
$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (1.16)$$

### Osservazioni.

1.  $\mu_0$  indica la costante di permeabilità magnetica del vuoto e il suo valore è quello dato in (1.4). Il ruolo di  $\mu_0$  è analogo a quello della costante dielettrica  $\epsilon_0$  del vuoto: essa dipende dalle proprietà magnetiche del vuoto, come la costante dielettrica dipende dalle proprietà elettriche. Ogni materia ha una sua costante di permeabilità magnetica; i materiali ferromagnetici sono caratterizzati da valori della permeabilità molto alti rispetto a quella del vuoto.
2. Serve, soprattutto in seguito, una definizione rigorosa di *corrente concatenata* con la curva  $\gamma$ . Qui se ne forniscono due equivalenti tra loro.

PRIMA DEFINIZIONE. Si dice che la curva  $\gamma$  è *concatenata con il filo* se ogni superficie  $S$  di *bordo*  $\gamma$  interseca il filo; viceversa si dice che  $\gamma$  *non è concatenata con il filo* se esiste una superficie  $S$  di *bordo*  $\gamma$  che non interseca il filo.

SECONDA DEFINIZIONE. Si dice che la curva  $\gamma$  è *concatenata con il filo* se ogni deformazione continua che riduce la curva  $\gamma$  a un punto interseca il filo conduttore almeno una volta; viceversa si dice che  $\gamma$  *non è concatenata con il filo* se esiste una deformazione continua che riduce la curva  $\gamma$  a un punto senza mai intersecare il filo.



**Figura 9:** La superficie  $S$  avente per bordo  $\gamma$  interseca il filo conduttore. Questo fatto succede per ogni superficie di bordo  $\gamma$ . Segue che la corrente è concatenata con il filo.

3. Se la curva  $\gamma$  è concatenata  $n$  volte con il filo, la legge di Ampère assume la forma seguente

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = n \mu_0 \Sigma i \quad (1.17)$$

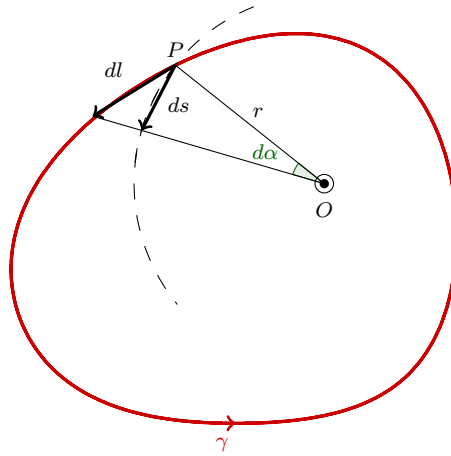
Se la curva non è concatenata con il filo, la costante  $n$  è uguale a zero e la circuitazione di  $\mathbf{B}$  è nulla. In entrambi i casi la circuitazione non dipende dalla forma della curva  $\gamma$  ma solo dalla corrente concatenata e da quante volte la curva “gira” attorno al filo.

4. La legge di Ampere vale quando nei fili le correnti sono stazionarie, cioè in ogni filo  $i$  non varia nel tempo.

### 1.7.3 Dimostrazione della legge di Ampère nel caso di un solo filo rettilineo

Se il filo percorso da corrente stazionaria  $i$  è rettilineo e infinito il calcolo della circuitazione di  $\mathbf{B}$  è relativamente semplice. Si distinguono due casi

*Primo caso.* Sia  $\gamma$  una curva orientata concatenata con il filo.



**Figura 10:** Circuitazione di  $\mathbf{B}$  lungo una linea chiusa concatenata con un filo rettilineo perpendicolare al foglio. La corrente è uscente dal foglio.

Si ha

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r} \mathbf{t} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.18)$$

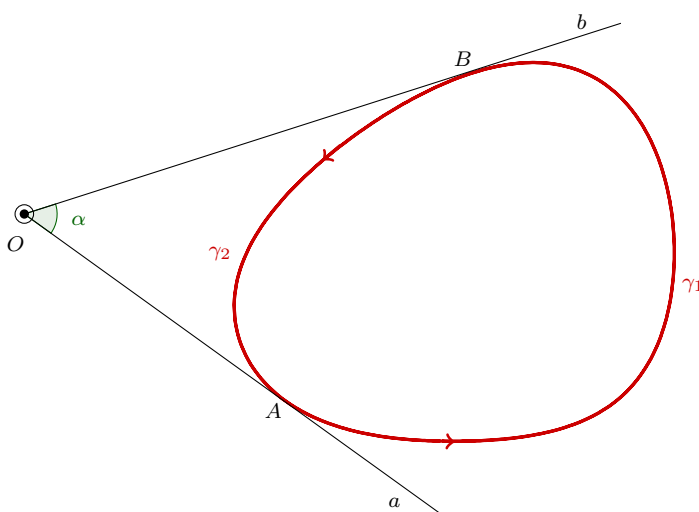
dove  $\mathbf{t}$  rappresenta il versore della tangente in  $P$  alla circonferenza di raggio  $r$ , orientato secondo il verso concorde con quello della corrente. La quantità  $\mathbf{t} \cdot d\mathbf{l}$  rappresenta la lunghezza del tratto elementare di circonferenza  $ds$  (si veda la figura sopra) e quindi  $d\alpha = \frac{\mathbf{t} \cdot d\mathbf{l}}{r} = \frac{ds}{r}$  è l'angolo al centro sotteso dall'elemento  $d\mathbf{l}$  di filo. L'uguaglianza (1.18) diventa

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} i d\alpha \quad (1.19)$$

Quindi la circuitazione di  $\mathbf{B}$  lungo  $\gamma$  è pari a

$$\begin{aligned}
 \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \oint \frac{\mu_0}{2\pi} i d\alpha \\
 &= \frac{\mu_0}{2\pi} i \oint d\alpha \\
 &= \frac{\mu_0}{2\pi} i 2\pi \\
 &= \mu_0 i
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

*Secondo caso.* Sia  $\gamma$  una curva orientata *non* concatenata con il filo.



**Figura 11:** Circuitazione di  $\mathbf{B}$  lungo una linea chiusa *non* concatenata con il filo.

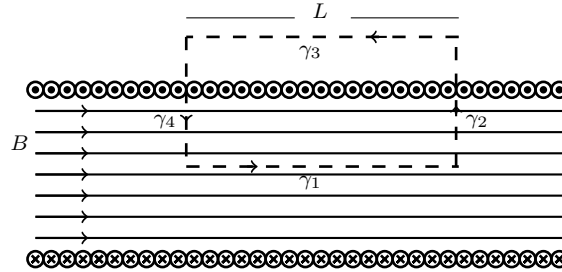
Siano  $A$   $B$  i punti di contatto delle tangenti  $a$  e  $b$  a  $\gamma$  passanti per  $O$ . La curva orientata risulta formata dalla curva  $\gamma_1$  che va da  $A$  a  $B$  e dalla curva  $\gamma_2$  che va da  $B$  a  $A$ :  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$  (si veda la figura). Allora la circuitazione di  $\mathbf{B}$  lungo  $\gamma$  vale

$$\begin{aligned}
 \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{\gamma_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\gamma_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \\
 &= \int_{\gamma_1} \frac{\mu_0}{2\pi} i \int d\alpha + \oint_{\gamma_2} \frac{\mu_0}{2\pi} i d\alpha \\
 &= \frac{\mu_0}{2\pi} i \left[ \int_{\gamma_1} d\alpha + \int_{\gamma_2} d\alpha \right] \\
 &= \frac{\mu_0}{2\pi} i [\alpha - \alpha] \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

Si dimostra (non qui) che il risultato trovato vale qualunque sia la forma del filo percorso da corrente.

### 1.7.4 Campo magnetico nei punti interni di un solenoide

Per determinare l'intensità del campo magnetico nei punti interni di un solenoide si usa la legge di Ampère. Si scelga la curva  $\gamma$  coincidente con il rettangolo orientato della figura qui sotto, nel quale i lati  $\gamma_1$ ,  $\gamma_3$  sono paralleli all'asse del solenoide e misurano  $L$ , mentre  $\gamma_2$ ,  $\gamma_4$  sono gli altri due lati verticali.



**Figura 12:** Il campo magnetico all'interno del solenoide è uniforme e ha direzione parallela a quella del suo asse, mentre nei punti esterni è praticamente nullo.

Se il rettangolo è concatenato *una volta* con il solenoide e  $i$  è la corrente che attraversa ogni spira, la legge di Ampère assume la forma

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 N i \quad (1.22)$$

dove  $N$  è il numero di spire del solenoide racchiuse dal rettangolo  $\gamma$ .

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{\gamma_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\gamma_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\gamma_3} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\gamma_4} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_{\gamma_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \\ &= B L \end{aligned} \quad (1.23)$$

Pertanto, dalle uguaglianze (1.22) e (1.23)

$$\mathbf{B} = \frac{N}{L} \mu_0 i \quad (1.24)$$

dove  $\frac{N}{L}$  è il numero di spire per unità di lunghezza del solenoide.

## 1.8 Non conservatività del campo magnetico

Obiettivo di questa sezione è sottolineare che *il campo magnetico  $\mathbf{B}$  non è conservativo mentre è conservativo il campo elettrico  $\mathbf{E}$* . Da ciò segue che per il campo magnetico non è possibile introdurre una funzione “potenziale magnetico” nello stesso modo in cui è stata introdotta per  $\mathbf{E}$ .

Alcuni richiami sul concetto di conservatività di un campo vettoriale.

- Un campo vettoriale  $\mathbf{F}$  si dice *conservativo* se, per ogni curva orientata chiusa risulta

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

- Se il campo vettoriale  $\mathbf{F}$  è *conservativo* e  $\gamma_1$  è una curva orientata che connette il punto  $P$  con il punto  $Q$  allora

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

non dipende dalla curva  $\gamma_1$  ma solo dai punti  $P, Q$  (e ovviamente da  $\mathbf{F}$ ).

Innanzitutto si ricordi che se  $\gamma$  è una curva orientata che connette il punto iniziale  $P$  con il punto finale  $Q$  allora l'integrale  $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$  dipende dal verso di percorrenza della curva, ossia

$$\int_{-\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

dove  $-\gamma$  indica il cammino  $\gamma$  percorso da  $Q$  a  $P$ .

Sia, ora  $\gamma_2$  è una curva orientata, diversa da  $\gamma_1$ , che connette  $P$  a  $Q$ . Si ottiene

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} + \int_{-\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

ossia

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{-\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

- Dal fatto precedente segue che, scelto arbitrariamente un punto  $O$  dello spazio, è possibile definire la funzione

$$\{\text{Punti dello spazio}\} \xrightarrow{U_o} \mathbb{R}, \quad U_o(P) = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

dove  $\gamma$  è un (qualsiasi) cammino orientato che va da  $O$  a  $P$ .

- Per ogni coppia di punti  $P, Q$  dello spazio si ha

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\gamma_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (1.25)$$

dove  $\gamma_1$  è un cammino orientato che connette  $O$  con  $P$ ,  $\gamma_2$  connette  $P$  con  $Q$  e  $\gamma_3$  connette  $Q$  con  $O$ . Da (1.25) si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} &= - \int_{\gamma_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} - \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_{-\gamma_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} - \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \\ &= U_o(Q) - U_o(P) \end{aligned}$$

- Se  $\mathbf{F}$  è conservativo si chiama *potenziale del campo*  $\mathbf{F}$  la funzione

$$V_o(P) = -U_o(P)$$

- La funzione potenziale (e ovviamente anche la funzione  $U_o$ ) è definita a meno di una costante, la quale dipende dalla scelta arbitraria del punto  $O$ .

### Il caso del campo elettrico.

Il vettore campo elettrico  $\mathbf{E}$  rappresenta la forza agente sull'unità di carica positiva  $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}$ . Quindi, se  $\gamma$  è una curva orientata che connette il punto iniziale  $P$  con il punto finale  $Q$ , l'integrale  $\int_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  rappresenta il lavoro compiuto da  $\mathbf{E}$  per portare l'unità di carica dal punto  $P$  al punto  $Q$ . Inoltre, per ogni curva orientata chiusa

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Segue che il campo  $\mathbf{E}$  è conservativo.

### Il caso del campo magnetico.

Per il campo magnetico (nel caso di correnti stazionarie) vale la legge di Ampère

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \Sigma i$$

dove  $\Sigma i$  indica la somma algebrica delle correnti concatenate con una qualsiasi curva  $\gamma$  orientata chiusa lungo la quale si calcola la circuitazione.

Quindi,  $\mathbf{B}$  non è conservativo perchè la circuitazione di  $\mathbf{B}$  non è sempre nulla.



## 1.9 Equazioni di Maxwell per campi elettrici e magnetici stazionari.

Le equazioni di Maxwell<sup>5</sup> per campi elettrici e magnetici che *non variano nel tempo* sono

### 1. Teorema di Gauss per il campo elettrico

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

dove  $S$  è una qualsiasi superficie chiusa orientata.

### 2. Conservatività del campo elettrico

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

### 3. Teorema di Gauss per il campo magnetico

$$\Phi_S(\mathbf{B}) = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

dove  $S$  è una qualsiasi superficie chiusa orientata.

### 4. Teorema di Ampere.

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = n \mu_0 i_c$$

---

<sup>5</sup>James Clerk Maxwell (Edimburgo, Scozia 1831 - Cambridge, Inghilterra 1879).