

# Note sui circuiti a corrente alternata

Mauro Saita

Versione provvisoria. Novembre 2018<sup>1</sup>

Per commenti o segnalazioni di errori scrivere, per favore, a:

maurosaita@tiscalinet.it

## Indice

<b>1</b>	<b>Corrente alternata</b>	<b>2</b>
1.1	Circuito puramente resistivo . . . . .	3
1.2	Circuito puramente capacitivo . . . . .	3
1.3	Circuito puramente induttivo . . . . .	5
1.4	Circuiti RLC . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Valori efficaci (valori quadratici medi)</b>	<b>9</b>
<b>3</b>	<b>Potenza in circuiti a corrente alternata</b>	<b>10</b>
3.1	Potenza assorbita da un circuito puramente resistivo . . . . .	10
3.2	Potenza assorbita da un circuito RLC . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Risonanza</b>	<b>11</b>

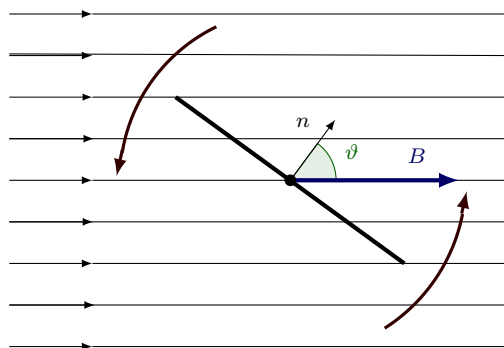
---

<sup>1</sup> File: "circuiti\_corrente\_alternata.tex"

## 1 Corrente alternata

Un alternatore è un dispositivo in grado di produrre corrente alternata. Ai capi del conduttore si produce una tensione che varia nel tempo con legge sinusoidale. Il moto delle cariche elettriche nel conduttore avvengono quindi alternativamente in un senso e in quello opposto, con una intensità anch'essa variabile sinusoidalmente nel tempo.

Il principio di funzionamento di un alternatore è schematizzato in figura: una spira di area  $S$  viene immersa in un campo magnetico uniforme ed è libera di ruotare attorno a un suo diametro perpendicolare alla direzione del campo magnetico.



**Figura 1:** Spira libera di ruotare in un campo magnetico uniforme (la spira è schematizzata dal segmento obliquo).

Se la spira ruota di moto circolare uniforme, il flusso del campo magnetico concatenato con essa varia nel tempo in modo periodico. Detto  $\vartheta$  l'angolo formato da  $\mathbf{B}$  con la normale  $\mathbf{n}$  alla superficie della spira si ha  $\Phi(\mathbf{B}) = B S \cos \vartheta$ . Posto  $\vartheta = \omega t$ , dove  $\omega$  è la velocità angolare della spira, il flusso  $\Phi(\mathbf{B})$  assume la forma seguente

$$\Phi(\mathbf{B}) = B S \cos \omega t \quad (1.1)$$

La legge di Faraday-Neumann-Lenz afferma che nel circuito si produce una forza elettromotrice indotta uguale all'opposto della velocità di variazione del flusso di  $\mathbf{B}$  rispetto al tempo, cioè

$$f = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = -\frac{d}{dt}[B S \cos \omega t] \quad (1.2)$$

Derivando rispetto al tempo si ottiene:

$$f = B S \omega \sin \omega t \quad (1.3)$$

Infine, posto  $f_{\max} = B S \omega$  si ha:

$$f = f_{\max} \sin \omega t \quad (1.4)$$

### 1.1 Circuito puramente resistivo

Si tratta di un circuito formato esclusivamente da un generatore a corrente alternata e da una resistenza  $R$  (se sono presenti più resistori,  $R$  indica la resistenza equivalente).

In questo caso la corrente che circola nel circuito è

$$i = \frac{f}{R} = \frac{f_{\max}}{R} \sin(\omega t) = i_{\max} \sin(\omega t) \quad (1.5)$$

Tensione e corrente sono in fase.

### 1.2 Circuito puramente capacitivo

Circuito formato da un generatore a corrente alternata e da un condensatore di capacità  $C$  (la resistenza è supposta trascurabile).

Il generatore, invertendo la polarità con frequenza  $\frac{\omega}{2\pi}$ , attiva in sequenza sulle armature del condensatore cicli di carica e di scarica. La corrente istantanea che circola nel circuito è data dall'effetto congiunto della forza elettromotrice  $f = f_{\max} \sin(\omega t)$  del generatore e della tensione  $V_C = \frac{Q}{C}$  presente sulle armature del condensatore.

Per la legge delle maglie di Kirchhoff si ottiene:

$$f - V_C = 0 \quad (1.6)$$

ossia

$$f_{\max} \sin(\omega t) - \frac{Q}{C} = 0 \quad (1.7)$$

$$Q = f_{\max} C \sin(\omega t) \quad (1.8)$$

Derivando la carica  $Q$  rispetto al tempo si ottiene l'intensità di corrente all'istante  $t$

$$i(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} [f_{\max} C \sin(\omega t)] = f_{\max} \omega C \cos(\omega t) \quad (1.9)$$

Per confrontare le fasi di tensione e corrente basta ricordare che  $\cos(\omega t) = \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$ .

Quindi la corrente nel circuito all'istante  $t$  è

$$i(t) = \omega C f_{\max} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \quad (1.10)$$

Nel circuito puramente capacitivo l'intensità di corrente è in anticipo di fase di  $\frac{\pi}{2}$ .

Quando  $\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = 1$  il valore dell'intensità di corrente è massimo. Per esempio, per  $\omega t = \pi$ , il valore della corrente è

$$i_{\max} = \omega C f_{\max} = \frac{f_{\max}}{\frac{1}{\omega C}} \quad (1.11)$$

In questo istante di tempo la carica  $Q$  sulle armature del condensatore è zero (e quindi anche  $V_C$  è zero); negli istanti di tempo successivi la carica sull'armatura aumenta progressivamente mentre diminuisce l'intensità di corrente. Quando  $Q$  raggiunge il valore massimo (e quindi anche  $V_C$  è massima) l'intensità di corrente è nulla. Successivamente la corrente fluisce nel verso opposto e defluendo dal condensatore.

La grandezza  $\frac{1}{\omega C}$  è detta *reattanza capacitiva*. Posto

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (1.12)$$

la relazione tra il valore massimo dell'intensità di corrente e il valore massimo della tensione si scrive in forma analoga a quella di un circuito puramente resistivo:

$$i_{\max} = \frac{f_{\max}}{X_C} \quad (1.13)$$

Il comportamento della corrente alternata in un circuito collegato in serie a un condensatore è molto diverso da quello della corrente continua. Come si è visto precedentemente, nel caso di corrente continua, la corrente decresce esponenzialmente e si arresta quando le armature del condensatore sono completamente cariche. Invece, in corrente alternata ( $f = f_{\max} \sin(\omega t)$ ), la corrente affluisce e defluisce periodicamente su ognuna delle due armature del condensatore e l'intensità di corrente all'istante  $t$  è  $i(t) = \omega C f_{\max} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$ . Quando  $\omega$  è grande il condensatore ostacola debolmente il passaggio di corrente mentre, per  $\omega$  piccolo, lo ostacola fortemente.

### 1.3 Circuito puramente induttivo

Circuito formato da un generatore a corrente alternata e da un'induttanza  $L$  (la resistenza è supposta trascurabile).

Il generatore, invertendo la polarità con frequenza  $\frac{\omega}{2\pi}$ , provoca in sequenza variazioni di flusso magnetico nel circuito che reagisce opponendo una forza elettromotrice indotta.

La corrente istantanea che circola nel circuito è data dall'effetto congiunto della forza elettromotrice  $f = f_{\max} \sin(\omega t)$  della forza elettromotrice indotta  $f_i = -L \frac{di}{dt}$ . Dalla seconda legge di Kirchhoff (delle maglie) si ottiene:

$$f - V_L = 0 \quad (1.14)$$

ossia

$$f_{\max} \sin(\omega t) = L \frac{di}{dt} \quad (1.15)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{f_{\max}}{L} \sin(\omega t) \quad (1.16)$$

Si tratta di un'equazione differenziale a variabili separabili:

$$\int di = \int \frac{f_{\max}}{L} \sin(\omega t) dt \quad (1.17)$$

Dalla quale si ottiene:

$$i(t) = -\frac{f_{\max}}{\omega L} \cos(\omega t) + k, \quad (1.18)$$

dove la costante  $k$  di integrazione è il valore medio dell'intensità di corrente su uno o più periodi e pertanto vale zero. Inoltre, per confrontare più facilmente le fasi di tensione e corrente si noti che  $-\cos(\omega t) = \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ . Tenendo conto di queste ultime due condizioni l'intensità di corrente assume la forma seguente:

$$i(t) = \frac{f_{\max}}{\omega L} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (1.19)$$

In un circuito puramente induttivo l'intensità di corrente è in ritardo di fase di  $\frac{\pi}{2}$  rispetto alla tensione mentre corrente e tensione hanno la stessa pulsazione.

Il valore massimo della corrente si ottiene da (1.19), quando  $\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = 1$ :

$$i_{\max} = \frac{f_{\max}}{\omega L} \quad (1.20)$$

La grandezza  $\omega L$  è detta *reattanza induttiva*. Posto

$$X_L = \omega L \quad (1.21)$$

la relazione tra il valore massimo dell'intensità di corrente e il valore massimo della tensione si può scrivere in forma analoga a quella di un circuito puramente resistivo (e puramente capacitivo):

$$i_{\max} = \frac{f_{\max}}{X_L} \quad (1.22)$$

In un circuito con un induttore l'intensità di corrente varia sinusoidalmente secondo la legge  $i(t) = \frac{f_{\max}}{\omega L} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$ . La variazione di intensità di corrente genera nel circuito una forza elettromotrice indotta che è direttamente proporzionale alla rapidità di variazione di  $i(t)$ . Quindi, per  $\omega$  grande, diventa grande anche la rapidità di variazione dell'intensità di corrente e, di conseguenza, diventa grande la forza elettromotrice indotta mentre, per  $\omega$  piccolo, la forza elettromotrice indotta assume valori piccoli, spesso trascurabili.

Pertanto un induttore esercita su una corrente alternata un effetto opposto rispetto a quello di un condensatore: a frequenze basse l'induttore ostacola debolmente il passaggio di corrente mentre lo ostacola fortemente nel caso di alte frequenze.

## 1.4 Circuiti RLC

È un circuito composto da un resistore, un induttore e un condensatore connessi in serie e alimentati da una forza elettromotrice sinusoidale di pulsazione  $\omega$ .

Si dimostra (trovando le soluzioni di una equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti) che:

$$i(t) = \frac{f_{\max}}{Z} \sin(\omega t - \delta) \quad (1.23)$$

$$i_{\max} = \frac{f_{\max}}{Z} \quad (1.24)$$

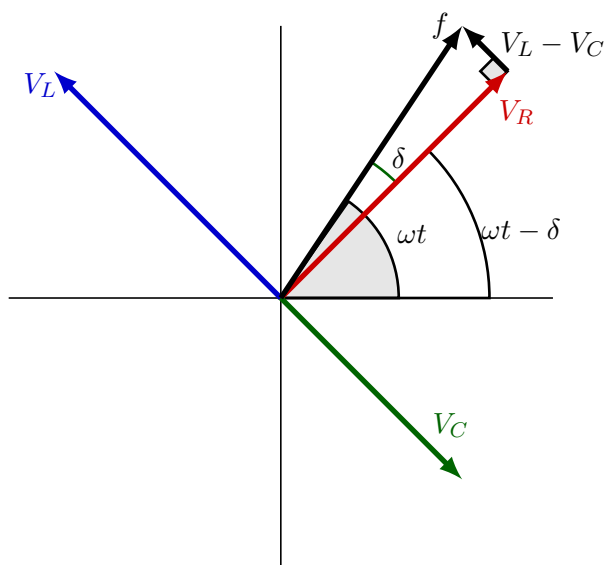
dove  $Z$  è detta *impedenza* e vale

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (1.25)$$

mentre la differenza di fase  $\delta$  è data da

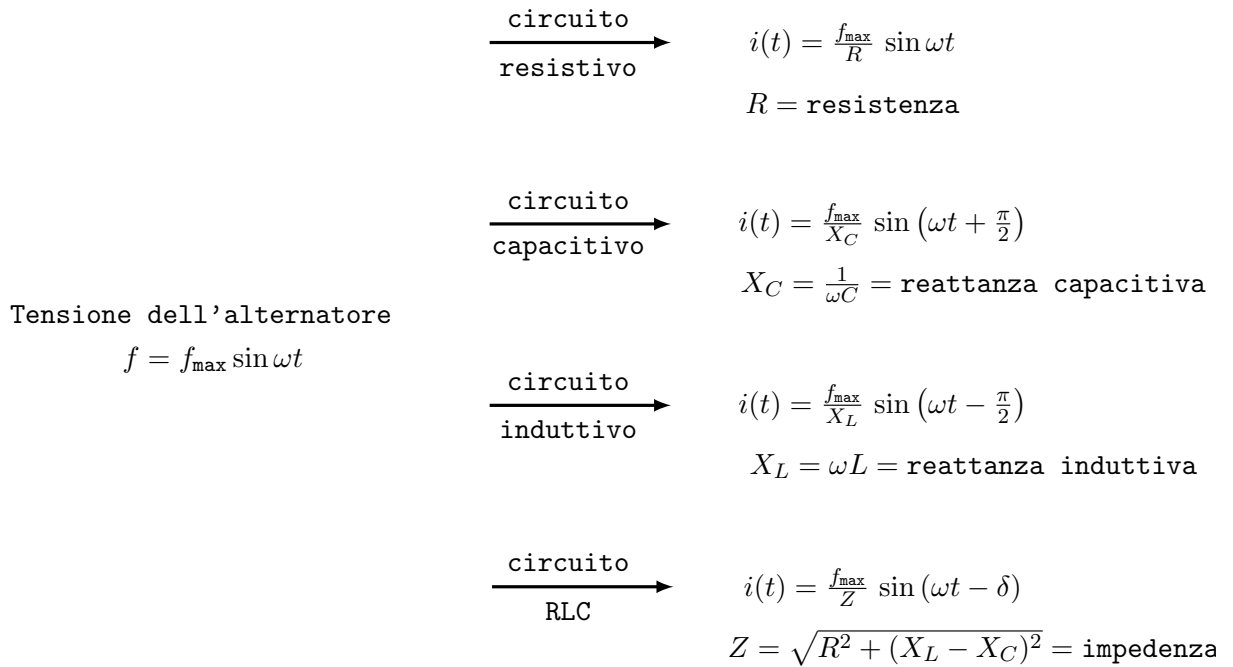
$$\tan \delta = \frac{X_L - X_C}{R} \quad (1.26)$$

Nella figura seguente sono rappresentati i vettori simbolici  $V_R, V_L, V_C$  che rappresentano, nell'ordine, le cadute di tensione ai capi del resistore, dell'induttore e del condensatore. La componente  $y$  di ciascuno di questi vettori uguale alla caduta di tensione istantanea ai capi dell'elemento circuitale corrispondente



**Figura 2:** Relazioni di fase tra le tensioni di un circuito RLC in serie.

Qui di seguito è riportato uno schema riassuntivo di quanto esposto nei paragrafi precedenti



**Figura 3:** Relazioni tra tensione e intensità di corrente in un circuito a corrente alternata.



## 2 Valori efficaci (valori quadratici medi)

Il valore efficace della funzione  $y = y(t)$  è la radice quadrata del valor medio di  $y^2(t)$ , cioè

$$y_{\text{eff}} = \sqrt{[y^2(t)]_{\text{medio}}} \quad (2.1)$$

Ricordando che il valor medio di  $\sin^2(\omega t)$  e  $\cos^2(\omega t)$  è uguale a  $\frac{1}{2}$ , i valori efficaci della forza elettromotrice ( $f(t) = f_{\text{max}} \sin(\omega t)$ ) e dell'intensità di corrente sono

$$f_{\text{eff}} = \sqrt{[f_{\text{max}}^2 \sin^2(\omega t)]_{\text{medio}}} = \frac{f_{\text{max}}}{\sqrt{2}} \quad (2.2)$$

$$i_{\text{eff}} = \frac{i_{\text{max}}}{\sqrt{2}} \quad (2.3)$$

Il valore efficace (valore quadratico medio) di una grandezza che varia sinusoidalmente è uguale al valore massimo della grandezza diviso per  $\sqrt{2}$ .

### 3 Potenza in circuiti a corrente alternata

#### 3.1 Potenza assorbita da un circuito puramente resistivo

La potenza all'istante  $t$  erogata da un alternatore ideale è il prodotto della forza elettromotrice per l'intensità di corrente:

$$P(t) = f(t) i(t) \quad (3.1)$$

Come si è mostrato nei paragrafi precedenti, in un circuito puramente resistivo la tensione varia in modo sinusoidale secondo la legge  $f(t) = f_{\max} \sin(\omega t)$  e l'intensità di corrente, in fase con  $f(t)$ , è  $i(t) = i_{\max} \sin(\omega t)$ . Quindi la potenza dissipata dal circuito è

$$P(t) = f(t) i(t) = R i(t) \cdot i(t) = R i_{\max}^2 \sin^2(\omega t) \quad (3.2)$$

Il periodo di  $P(t)$  è  $\frac{\omega}{\pi}$ , cioè la metà del periodo della fem che alimenta il circuito. A meno di traslazioni di  $\frac{\pi}{2}$  le funzioni  $y = \sin^2(\omega t)$  e  $y = \cos^2(\omega t)$  coincidono e il valor medio di entrambe le funzioni vale  $\frac{1}{2}$ . Pertanto la potenza media dissipata nel resistore è

$$P_m = \frac{1}{2} i_{\max}^2 R \quad (3.3)$$

Infine, ricordando che  $i_{\text{eff}} = \frac{i_{\max}}{\sqrt{2}}$ , da (3.3) si ottiene il valore della potenza media in relazione al valore efficace della corrente

$$P_m = i_{\text{eff}}^2 R \quad (3.4)$$

#### Osservazione.

Dall'uguaglianza (3.2) si deduce che  $P(t)$  è sempre positiva; pertanto, come è lecito aspettarsi, quando una corrente attraversa una resistenza, dissipa sempre energia indipendentemente dal suo verso. La potenza erogata dal generatore è interamente dissipata per effetto Joule.

#### 3.2 Potenza assorbita da un circuito RLC

Nel caso di un circuito RLC con impedenza  $Z$  la relazione tra tensione e corrente in termini di valori efficaci è

$$i_{\text{eff}} = \frac{f_{\text{eff}}}{Z} \quad (3.5)$$

La potenza media assorbita dal circuito è  $P_m = R i_{\text{eff}}^2$ ; tenendo conto di (3.5) si ottiene

$$P_m = R i_{\text{eff}} i_{\text{eff}} = R \frac{f_{\text{eff}}}{Z} i_{\text{eff}} \quad (3.6)$$

ossia

$$P_m = i_{\text{eff}} f_{\text{eff}} \frac{R}{Z} \quad (3.7)$$

Se  $R$  è molto piccola rispetto a  $Z$  non vi è (praticamente) alcun assorbimento di potenza. Al crescere di  $\frac{R}{Z}$  la potenza assorbita cresce e assume valore massimo in corrispondenza di  $\frac{R}{Z} = 1$ , cioè in condizioni di risonanza. Infatti il fattore  $\frac{R}{Z}$  è legato all'angolo di sfasamento  $\delta$  dalla relazione

$$\cos \delta = \frac{R}{Z} \quad (3.8)$$

### Osservazione

In un circuito RLC la potenza è assorbita interamente dal resistore, infatti il condensatore si carica e scarica senza consumare energia e l'induttore accumula e rilascia energia senza dissipazione.

## 4 Risonanza

Come si è detto nei paragrafi precedenti, in un circuito RLC l'intensità di corrente varia nel tempo secondo la legge:  $i(t) = \frac{f_{\text{max}}}{Z} \sin(\omega t - \delta)$ , dove l'impedenza vale  $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$

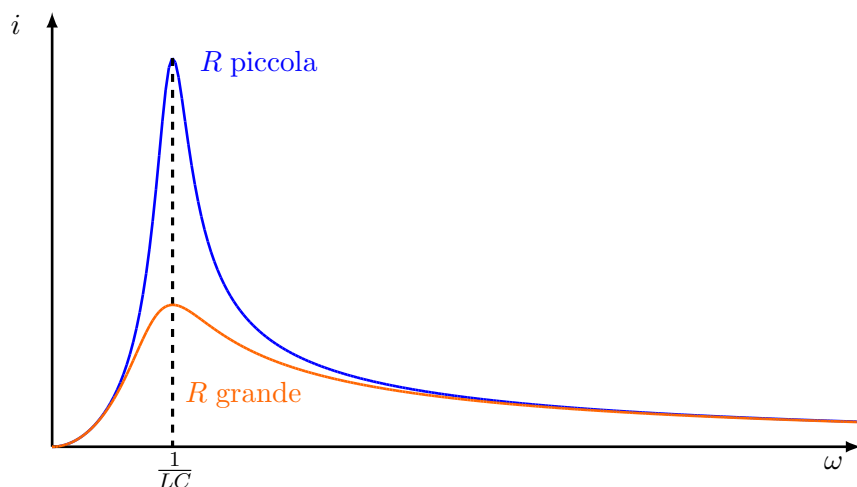
A basse frequenze la reattanza capacitiva  $X_C = \frac{1}{\omega C}$  è molto maggiore della reattanza induttiva  $X_L = \omega L$  e di conseguenza prevale l'effetto capacitivo e l'intensità di corrente è molto bassa. Invece, a frequenze molto alte, la reattanza capacitiva  $X_C = \frac{1}{\omega C}$  diventa piccola mentre è grande reattanza induttiva  $X_L = \omega L$ ; in questo caso prevale l'effetto induttivo e l'intensità di corrente è molto grande.

Particolarmente interessante è il caso in cui  $X_C = X_L$ . In questa situazione il circuito si dice in *risonanza*: l'impedenza assume valore minimo pari a  $R$ , l'intensità di corrente è massima e la differenza di fase  $\delta$  è nulla; corrente e tensione sono in fase.

La pulsazione  $\omega_0$  corrispondente a  $X_C = X_L$  è detta *pulsazione di risonanza*. Da  $\frac{1}{\omega C} = \omega L$ , ossia

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi f_0 \quad (4.1)$$

dove  $f_0$  è la (*frequenza di risonanza*). In questa



**Figura 4:** Intensità di corrente in funzione di  $\omega$ . I picchi corrispondono a condizioni di risonanza.

**Esempio.** Un circuito RLC possiede induttanza di  $2,0 \text{ H}$ , capacità di  $2,0 \mu\text{F}$  e resistenza di  $30 \Omega$ . la fem massima dell'alternatore è pari a  $120 \text{ V}$ . massima. Determinare Calcolare inoltre, quando la frequenza dell'alternatore è  $f = 50 \text{ Hz}$ ;

- la frequenza di risonanza e la corrispondente intensità di corrente;
- l'intensità di corrente massima quando la frequenza dell'alternatore è di  $50 \text{ Hz}$ ;
- la differenza di fase alla frequenza di  $50 \text{ Hz}$ ;
- la potenza media dell'alternatore quando la frequenza è di  $50 \text{ Hz}$ ;
- la tensione massima ai capi del resistore, del condensatore e dell'induttore quando il circuito è in risonanza.