Equazioni differenziali ordinarie
Alcuni esempi

Mauro Saita

e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Versione provvisoria. Dicembre 2016.[1]

Indice

[1] Nome File: equazioni_differenziali_2016.tex

1 Equazioni differenziali ordinarie

La derivata prima della funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{y} \mathbb{R}$, $y = y(x)$ si denota con i simboli $\frac{dy}{dx}$, $y'(x)$ o più semplicemente con y' quando è chiaro dal contesto quale sia la variabile indipendente rispetto alla quale considerare la derivata; la derivata seconda si denota con $\frac{d^2y}{dx^2}$, $y''(x)$, o y'', quella n-esima con $\frac{d^ny}{dx^n}$, $y^{(n)}(x)$, o $y^{(n)}$. Un'*equazione differenziale* è un'equazione che coinvolge una funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{y} \mathbb{R}$, $y = y(x)$ e alcune delle sue derivate cioè un'equazione del tipo:

$$F(x, y, y', \ldots\ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

dove F esprime la relazione tra la variabile indipendente x, la funzione incognita $y = y(x)$ e le sue derivate $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ fino ad un certo ordine n.

Una funzione $I \xrightarrow{y} \mathbb{R}$, $y = y(x)$, il cui dominio I è un intervallo di $\mathbb{R}$, si dice *soluzione dell'equazione differenziale (1.1) nell'intervallo I* se

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots\ldots, y^{(n)}(x)) = 0 \tag{1.2}$$

per ogni x in I. Il grafico della soluzione $I \xrightarrow{y} \mathbb{R}$, $y = y(x)$ si chiama *curva integrale*.

Una equazione differenziale si dice *del primo ordine* se la massima derivata della funzione incognita che compare nell'equazione è la derivata prima $y'(x)$, essa è del tipo

$$y' = f(x, y) \tag{1.3}$$

dove $f(x, y)$ è una funzione continua su un dominio Ω di $\mathbb{R}^2$. In modo analogo l'equazione $y'' = f(x, y, y')$ si dice *del secondo ordine* e così via.

Il *problema di Cauchy* (*problema ai valori iniziali*) di una equazione differenziale del primo ordine consiste nel cercare una soluzione $y(x)$ il cui grafico passi per un punto assegnato (x_0, y_0) di Ω. In altri termini, il problema di Cauchy consiste nel risolvere il sistema

$$\begin{cases} y' & = & f(x, y) \\ y(x_0) & = & y_0 \end{cases} \tag{1.4}$$

In modo simile, il *problema di Cauchy* (*problema ai valori iniziali*) di una equazione differenziale del secondo ordine consiste nel cercare una soluzione $y(x)$ il cui grafico passi per un punto assegnato ($y(x_0) = y_0$) con una certa derivata prima ($y'(x_0) = v_0$). In questo caso risolvere il problema di Cauchy consiste nel risolvere il sistema

$$\begin{cases} y'' & = & f(x, y, y') \\ y(x_0) & = & y_0 \\ y'(x_0) & = & v_0 \end{cases} \tag{1.5}$$

L'esempio più semplice di equazione differenziale, certamente non il più significativo, è rappresentato dalla ricerca delle primitive di una funzione (derivabile), il problema consiste nel ricercare tutte e sole le funzioni (derivabili) $y = y(x)$ che soddisfano l'equazione

$$y'(x) = g(x) \tag{1.6}$$

cioè $y(x) = \int g(x)\, dx$.

La maggior parte degli esempi proposti in queste note presentano problemi che hanno origine nelle scienze applicate. Le equazioni differenziali costituiscono i modelli matematici (diciamo, la traduzioni matematiche) di questi problemi. I primi due sono tratti dalla fisica.

Moto rettilineo uniforme. Un corpo si muove di moto rettilineo uniforme lungo la retta y con velocità $v = v_0$, costante nel tempo. Sapendo che all'istante $t_0 = 0$ il corpo si trova nella posizione y_0, trovare la posizione $y = y(t)$ del corpo all'istante t.

Soluzione. Si tratta di risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' & = & v_0 \\ y(0) & = & y_0 \end{cases} \tag{1.7}$$

L'equazione differenziale associata a questo moto è un caso particolare di (1.6), cioè

$$\frac{dy}{dt} = v_0 \tag{1.8}$$

le cui soluzioni sono $y(t) = v_0 t + c$, $c \in \mathbb{R}$. Posto $y(0) = y_0$ si trova la legge oraria del moto rettilineo uniforme

$$y(t) = y_0 + v_0 t \tag{1.9}$$

Moto rettilineo uniformemente accelerato: caduta dei gravi. Un corpo posto nelle vicinanze della superficie terrestre viene lasciato libero di cadere. Esso si muove lungo una retta y perpendicolare al suolo sotto l'azione della sola accelerazione g di gravità che è supposta costante. Se all'istante $t_0 = 0$ il corpo si trova nella posizione y_0 e se nel medesimo istante la sua velocità è v_0, trovare la legge oraria $y = y(t)$ del moto del corpo.

Soluzione. Se non si tiene conto dell'attrito dell'aria (come suggerisce il testo) il corpo si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato lungo la retta y. La legge oraria del moto è fornita dalla soluzione del seguente problema di Cauchy[2]

$$\begin{cases} y'' & = & -g \\ y(0) & = & y_0 \\ y'(0) & = & v_0 \end{cases} \tag{1.10}$$

l'equazione differenziale associata al *moto di caduta di un grave in assenza di attrito* è del secondo ordine, $y'' = -g$ Integrando due volte si ottiene una soluzione che dipende da due

[2] Il segno meno che compare nell'equazione differenziale sta a indicare che il campo gravitazionale terrestre g ha verso opposto rispetto a quello della retta y: il primo è orientato verso il basso mentre la retta verso l'alto.

parametri reali: $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + ct + d$. Le due condizioni iniziali permettono con pochi conti di trovare la legge oraria richiesta

$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{1.11}$$

1.1 Equazioni differenziali a variabili separabili.

Un'equazione differenziale a variabili separabili è un equazione del tipo

$$y' = f(x)g(y) \tag{1.12}$$

dove $f(x)$ è una funzione della sola variabile x e $g(y)$ una funzione della sola variabile y. Le equazioni $y' = (x^2 + 1)y$ e $y' = 2x(3y + 1)$ sono esempi di equazioni differenziali a variabili separabili.

Sia $\overline{y}$ uno zero della funzione $g(y)$:

$$g(\overline{y}) = 0$$

La funzione costante $y(x) = \overline{y}$ è soluzione dell'equazione (1.12) perchè la derivata della funzione costante $y(x) = \overline{y}$ è nulla e quindi soddisfa (1.12)). Quindi, a ogni soluzione $\overline{y}$ dell'equazione $g(y) = 0$ (se ne esistono) corrisponde la soluzione costante $y(x) = \overline{y}$ dell'equazione (1.12)). Queste soluzioni costanti si chiamano *soluzioni di equilibrio.*

Per determinare le altre soluzioni $y = y(x)$ dell'equazione (1.12)) si procede così: sia $y = y(x)$ una funzione per la quale $g(y)$ non sia identicamente nulla. Allora (per continuità) esiste tutto un intervallo, diciamo J, sul quale la funzione $g(y)$ non si annulla mai. Per ogni $x \in J$ l'equazione differenziale $y' = f(x)g(y)$ si può scrivere come

$$\frac{1}{g(y)}\, y' = f(x) \tag{1.13}$$

Sia $G(y)$ una primitiva di $\dfrac{1}{g(y)}$:

$$G'(y) = \frac{1}{g(y)} \tag{1.14}$$

Per la regola di derivazione di una funzione composta, si ha:

$$G'(y(x)) = G'(y)\, y' = \frac{1}{g(y)}\, f(x)g(y) = f(x) \tag{1.15}$$

Dunque $G(y(x))$ è una primitiva di $f(x)$. Se $F(x)$ è una qualunque altra primitiva di $f(x)$, si avrà

$$G(y(x)) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R} \tag{1.16}$$

Siccome sull'intervallo J la derivata $G'(y) = \frac{1}{g(y)}$ non si annulla mai e ha sempre lo stesso segno, la funzione G è invertibile su J. Detta G^{-1} la sua inversa, da (1.16) segue che

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + c), \quad c \in \mathbb{R} \tag{1.17}$$

In questo modo si trova (almeno in linea teorica) la soluzione $y(x)$. La formula (1.17) è però in generale soltanto teorica, perchè è spesso diffcile, o impossibile, trovare G^{-1} e ricavare esplicitamente la funzione y dall'uguaglianza (1.17). In ogni caso, la formula (1.16) fornisce le soluzioni in forma implicita.

1.2 La tecnica di Leibniz di separazione delle variabili

Per determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = f(x)g(y) \tag{1.18}$$

conviene utilizzare il metodo pratico, ideato da Leibniz nel 1691. Questo metodo, che si basa sulla separazione formale delle variabili, costituisce una sintesi del procedimento esposto nel paragrafo precedente. Anzitutto si trovano le soluzioni di equilibrio, cioè le soluzioni costanti $y(x) = \overline{y}$, dove $\overline{y}$ è un numero reale per il quale $g(\overline{y}) = 0$, poi si scrive la derivata y' che compare nell'equazione (1.18) con la notazione di Leibniz ($\frac{dy}{dx}$) e si 'separano le variabili'

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

$$\frac{1}{g(y)}\,dy = f(x)\,dx \qquad g(y) \neq 0$$

Nell'ultima uguaglianza, il dominio della funzione y è un intervallo in cui $g(y)$ non si annulla mai. Ora si integrano formalmente entrambi i membri:

$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx \tag{1.19}$$

$$G(y) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R} \tag{1.20}$$

dove $G(y)$ e $F(x)$ sono rispettivamente le primitive di $\frac{1}{g(y)}$ e $f(x)$. L'uguaglianza (1.20) coincide con (1.16); essa fornisce le soluzioni dell'equazione differenziale in forma implicita. In molti casi questo è l'unico modo in cui si riescono a scrivere le soluzioni, ovviamente, tutte le volte che sarà possibile, si scriveranno le soluzioni nella forma $y = y(x)$.

Esempio. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$yy' = (1 - y^2)^2 \tag{1.21}$$

Soluzione.

Le funzioni costanti $y = \pm 1$ sono le soluzioni di equilibrio. Posto $y \neq \pm 1$ si 'separano le variabili'

$$\frac{y}{(1-y^2)^2}\, dy = dx$$

Infine integrando entrambi i termini dell'uguaglianza si ottiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{1}{1-y^2} &= x + c, && c \in \mathbb{R} \\
1 - y^2 &= \frac{1}{2(x+c)}, && c \in \mathbb{R} \\
y &= \pm\sqrt{1 - \frac{1}{2(x+c)}}\,, && c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Le funzioni $y = \pm 1$, soluzioni di (1.21), non si ottengono per nessun valore del parametro c dell'integrale generale; sono gli *integrali singolari* di (1.21).

1.3 Equazione differenziale della crescita (decadimento) esponenziale.

1.3.1 Crescita illimitata di una popolazione.

Analizzare il modo in cui cresce una popolazione di individui è un problema di grande interesse che si pone, per esempio, quando si voglia studiare la crescita di una popolazione umana o animale in determinate condizioni ambientali oppure la crescita di una colonia di cellule o di batteri in terreno di coltura. Qui si analizza il caso di una popolazione che vive in una sorta di isolamento ideale, nel senso che non è minacciata da predatori, non subisce gli effetti negativi dovuti al sovraffollamento, non è soggetta a fenomeni immigratori o emigratori. Con queste restrizioni risulta plausibile formulare la seguente ipotesi: *la velocità di crescita della popolazione all'istante t è direttamente proporzionale al numero di individui della popolazione nel medesimo istante.*

Se $T \xrightarrow{N} \mathbb{R}$, $N = N(t)$ è la funzione che fornisce il numero $N(t)$ di individui all' istante t, la derivata $\frac{dN}{dt}(t)$ rappresenta la velocità di crescita (decrescita) della popolazione nel medesimo istante di tempo. La costante di proporzionalità $k \in \mathbb{R}$ è una costante che dipende dal tipo di popolazione che si sta analizzando. Allora l'ipotesi formulata sopra si traduce nell'equazione differenziale

$$\frac{dN}{dt} = kN(t) \tag{1.22}$$

Infine se è noto il numero di individui all'istante t_0 ($N(t_0) = N_0$) e si vuole predire il numero di individui in un qualsiasi istante di tempo successivo a t_0, allora bisogna risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = kN(t) \\ N(t_0) = N_0 \end{cases} \tag{1.23}$$

1.3.2 Decadimento radioattivo.

Il decadimento radioattivo è un fenomeno nucleare scoperto nei primi anni del 1900 dal fisico francese H. Bequerel. Alcuni elementi possiedono in natura isotopi radioattivi instabili che decadono spontaneamente (si disintegrano) emettendo particelle e fotoni. Quando un isotopo radioattivo decade si trasforma in un nuovo elemento che, se non è stabile, decadrà successivamente in un altro elemento e così via. Queste trasformazioni continuano fino al raggiungimento di uno stato stabile; per esempio l'isotopo dell'uranio $^{238}U_{92}$ (si veda la figura qui a lato) si trasforma nel tempo in altri isotopi radioattivi quali il torio, il radio, il radon fino a raggiungere il piombo $^{206}Pb_{82}$ che è l'isotopo stabile finale.

La legge che regola queste continue trasformazioni è la seguente: il numero di atomi radioattivi dN che si disintegrano nell'unità di tempo dt è direttamente proporzionale al numero N(t) di atomi radioattivi presenti nel campione in quell'istante. L'equazione differenziale che descrive questo fenomeno è

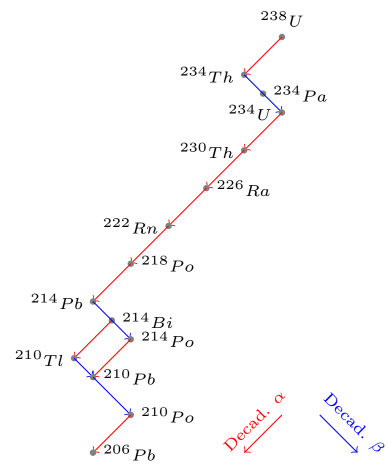

Figura 1: Schema dei decadimenti che trasformano l'uranio 238 in piombo 206. Una certa quantità di uranio si dimezza (trasformandosi in piombo) in 4.510.000.000 anni.

$$\frac{dN}{dt} = kN(t) \tag{1.24}$$

con $k \in \mathbb{R}$, $k < 0$.

1.3.3 Fissione nucleare.

La fissione nucleare è un fenomeno complesso che si può spiegare qualitativamente nel seguente modo: i protoni all'interno di un nucleo sono tenuti insieme da una forza nucleare (detta *interazione forte*) che è circa 100 volte più intensa della forza di repulsione elettrostatica che si esercita tra protone e protone. Quando si bombarda il nucleo di un atomo pesante, per esempio il nucleo dell'uranio ^{235}U, con un neutrone l'atomo si 'spezza' in due atomi più piccoli, questo è il fenomeno di fissione. Sebbene la fissione possa avvenire in modi diversi alla fine libera sempre qualche neutrone e una grande quantità di energia (circa 200 MeV per ogni fissione). Ecco alcuni esempi:

$$^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n \longrightarrow {}^{142}_{56}Ba + {}^{92}_{36}Kr + 2\,{}^{1}_{0}n$$

$$^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n \longrightarrow {}^{141}_{56}Ba + {}^{92}_{36}Kr + 3\,{}^{1}_{0}n$$

$$^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n \longrightarrow ^{140}_{54}Xe + ^{94}_{38}Sr + 2\,^{1}_{0}n$$

Il numero di neutroni dN che si liberano nell'unità di tempo dt è proporzionale al numero $N(t)$ di neutroni liberi presenti in quell'istante, cioè

$$\frac{dN}{dt} = kN(t) \tag{1.25}$$

con $k \in \mathbb{R}$. Se $k \geq 0$ si verifica una *reazione a catena* che automantiene il fenomeno di fissione generando enormi quantità di energia. Il 2 dicembre del 1942 il fisico italiano Enrico Fermi realizza in un cortile interno dell'università di Chicago la prima pila nucleare nella quale il processo di fissione si automantiene[3]

Il 6 agosto 1945 il bombardiere statunitense Enola Gay lancia sulla città di Hiroshima (Giappone) la prima bomba atomica della storia dell'umanità . È una bomba all'uranio, denominata ironicamente Little boy. Provocherà centinaia di migliaia di morti, quasi tutti civili.

Tutti i fenomeni analizzati in questa sezione sono descritti dall'equazione differenziale $\frac{dN}{dt} = kN(t)$. Per determinare la soluzione di questa equazione soddisfacente la condizione iniziale $N(0) = N_0$ bisogna risolvere il seguente problema (di Cauchy)

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = kN(t) \\ N(0) = N_0 \end{cases} . \tag{1.26}$$

Separando le variabili e integrando si ottiene

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = k \tag{1.27}$$

$$\begin{aligned} \int \tfrac{1}{N}\, dN &= \int k\, dt \\ \ln|N| &= kt + C \\ |N| &= e^{kt+C} \end{aligned}$$

Quindi le funzioni $N = N(t)$ soluzioni di $\frac{dN}{dt} = kN(t)$ sono

$$N(t) = Ae^{kt} \tag{1.28}$$

dove A è una costante reale. Dalla condizione $N(0) = N_0$ si ricava $A = N_0$, pertanto la soluzione del problema di Cauchy (**??**) è

$$N(t) = N_0 e^{kt} \tag{1.29}$$

[3]Sul luogo è posta una targa in bronzo in cui si legge: "Il 2 dicembre 1942 l'uomo ottenne qui la prima reazione a catena automantenentesi e di qui iniziò la produzione controllata dell'energia nucleare."

Esercizio 1.1. *Disegnare il grafico della funzione*

$$[0, +\infty) \xrightarrow{N} \mathbb{R}, \; N(t) = N_0 e^{kt}$$

nei casi $k = 1$, $k = 0$, $k = -1$. *Che cosa succede al crescere del tempo* t*? Spiegare.*

Esercizio 1.2 (Tempo di raddoppio.)**.** *Una certa popolazione di individui cresce secondo la legge*

$$N(t) = N_0 e^{kt}$$

con k *parametro reale positivo.*

1. *Verificare che il numero di individui* N_0 *raddoppia dopo un tempo* $T = \dfrac{\ln 2}{k}$.
2. *Verificare che qualunque sia l'istante iniziale* t *il numero di individui della popolazione raddoppia dopo un intervallo di tempo costante, detto* tempo di raddoppio*, pari a* $T = \dfrac{\ln 2}{k}$.

Soluzione.

1. Si vuole determinare l'istante di tempo T in cui la popolazione iniziale (pari a N_0) raddoppia. Si ha $N(T) = N_0 e^{kT} = 2N_0$ e quindi $e^{kT} = 2$, $T = \frac{\ln 2}{k}$.
2. Qualunque sia l'istante iniziale t si ha: $N(t + \frac{\ln 2}{k}) = N_0 e^{kt + \ln 2} = 2N_0 e^{kt} = 2N(t)$

Esercizio 1.3. *In una coltura batterica sono presenti inizialmente* 10^5 *batteri. Il loro numero raddoppia ogni* 2 *ore e* 50 *minuti. Quanti batteri ci saranno nella coltura dopo* 24 *ore?*

Esercizio 1.4 (Tempo di dimezzamento.)**.** *Una certa quntità di sostanza radiottiva decade secondo la legge* $N(t) = N_0 e^{kt}$ *dove* $N(t)$ *è il numero di isotopi radiottivi presenti all'istante* t *e* k *è un parametro reale negativo. Verificare che qualunque sia l'istante iniziale* t *il numero di isotopi radioattivi si dimezza dopo un intervallo di tempo costante, detto* tempo di dimezzamento*, pari a* $T = \dfrac{-\ln 2}{k}$.

Nella seguente tabella sono riportati i tempi di dimezzamento di alcune sostanze radioattive

Isotopi radioattivi	Struttura chimica	Tempi di dimezzamento
Azoto	^{13}N	10 minuti
Carbonio	^{14}C	5730 anni
Iodio	^{131}I	$8,05$ giorni
Ossigeno	^{15}O	124 secondi
Uranio	^{238}U	$4,5 \cdot 10^9$ anni

Esercizio 1.5. *Utilizzando i tempi di dimezzamento riportati nella precedente tabella rispondere ai seguenti quesiti.*

1. *In un terreno si è riscontrata la presenza di* ^{238}U*. Dopo* 10 *anni che percentuale rimane della quantità iniziale di tale sostanza? e dopo* 30 *anni?*

2. *Calcolare il tempo necessario affinchè una data quantità di* ^{13}N *si riduca a meno del* 5%*. Quanto tempo sarà necessario affinchè una data quantità di* ^{14}C *si riduca a meno del* 25% *della quantità iniziale?*

Esercizio 1.6. * *In base alla legge del raffreddamento di Newton, un corpo caldo introdotto in un ambiente più freddo si raffredda con una rapidità proporzionale alla differenza fra la sua temperatura e quella dell'ambiente. Se una tazzina di caffè che si trova in un luogo mantenuto a una temperatura di* $20\,^0C$ *si raffredda da* $80\,^0C$ *a* $50\,^0C$ *in cinque minuti, quanto altro tempo sarà richiesto affinché si raffreddi fino a* $40\,^0C$*?*

1.4 Equazioni lineari del primo ordine

Si chiama *equazione differenziale lineare del primo ordine* l'equazione

$$y' + a(x)y = f(x) \tag{1.30}$$

dove $a(x)$ e $f(x)$ sono funzioni della sola variabile x. Si chiama *equazione differenziale lineare* omogenea *del primo ordine* l'equazione

$$y' + a(x)y = 0 \tag{1.31}$$

Teorema 1.7 (Teorema di struttura delle soluzioni)**.** *Le soluzioni* $y = y(x)$ *dell'equazione (1.30) sono tutte e sole le funzioni*

$$y = \bar{y} + y_1$$

dove $\bar{y}$ *è una qualunque soluzione dell'equazione omogenea (1.31) mentre* y_1 *è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea (1.30). In altri termini*

$$\texttt{Soluzioni di (1.30)} \;=\; \begin{array}{c}\texttt{Soluzioni dell'equazione omogenea (1.31)}\\ + \\ \texttt{Soluzione particolare di (1.30)}\end{array}$$

Dimostrazione. Sia $\bar{y}$ una qualunque soluzione di (1.31) e y_1 una soluzione di (1.30). Si ha

$$\bar{y}\,' + a(x)\bar{y} = 0$$

$$y_1' + a(x)y_1 = f(x)$$

Sommando membro a membro le due precedenti uguaglianze si ottiene:

$$(\bar{y} + y_1)' + a(x)(\bar{y} + y_1) = f(x)$$

cioè $y = \bar{y} + y_1$ è soluzione di (1.30). Viceversa, sia y_1 una soluzione particolare di (1.30). Allora una qualunque soluzione y di (1.30) si scrive così: $y = (y - y_1) + y_1$, dove $(y - y_1)$ è una soluzione dell'equazione omogenea (1.31). ∎

Quindi se si vogliono trovare tutte le soluzioni dell'equazione lineare (1.30) bisogna

1) determinare le soluzioni dell'equazione lineare omogenea;

2) ricercare una soluzione particolare dell'equazione lineare;

3) sommare le soluzioni trovate.

Soluzione generale dell'equazione omogenea $y' + a(x)y = 0$.

Separando le variabili e integrando si ottiene:

$$\frac{dy}{y} = -a(x)\,dx$$

$$\ln|y| = \int -a(x)\,dx$$

$$|y| = e^{\int -a(x)\,dx}$$

Indicata con $A(x)$ una primitiva di $a(x)$ si ottiene

$$|y| = e^{-A(x)+K} \qquad K \in \mathbb{R}$$

$$y = Ce^{-A(x)} \qquad C \in \mathbb{R} \tag{1.32}$$

Ricerca di una soluzione particolare di (1.30) con il metodo della variazione delle costanti (Lagrange 1775,1788).

L'dea di Lagrange è di ricercare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea tra le funzioni del tipo

$$y_1 = c(x)e^{-A(x)} \tag{1.33}$$

dove $c(x)$ è una funzione della sola incognita x. Poichè ${y_1}' = c'(x)e^{-A(x)} - c(x)\,a(x)e^{-A(x)}$, sostituendo (1.33) nell'equazione (1.30) si ottiene

$$c'(x)e^{-A(x)} - c(x)\,a(x)e^{-A(x)} + a(x)\,c(x)e^{-A(x)} = f(x)$$

cioè

$$c'(x)e^{-A(x)} = f(x)$$

$$c'(x) = f(x)e^{A(x)}$$

$$c(x) = \int f(x)e^{A(x)}\,dx \tag{1.34}$$

Integrale generale dell'equazione lineare del primo ordine

Sommando l'integrale generale (1.32) e l'integrale particolare (1.34) (per il teorema di struttura) si ricava l'integrale generale dell'equazione lineare del primo ordine cioè

$$y = e^{-A(x)}\left[\int f(x)e^{A(x)}\,dx\ + C\right]$$

1.5 Moto armonico semplice.

Un corpo di massa m è collegato a una molla di costante elastica k ed è libero di muoversi su di una superficie orizzontale liscia. Se si comprime la molla di un tratto x, la forza esercitata dalla molla sul corpo è $F(x) = -mx$. Supposti trascurabili gli attriti, si descriva il moto del corpo in funzione del tempo t.

Soluzione. Si applichi la seconda legge della dinamica $F = ma$ al sistema in esame ponendo $-kx$ al posto di F e $\frac{d^2x}{dt^2}$ al posto di a. Si ottiene la seguente equazione differenziale $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx$, ovvero

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{1.35}$$

La legge oraria del moto $T \xrightarrow{x} \mathbb{R}$, $x = x(t)$, soluzione dell'equazione differenziale va ricercata tra le funzioni del tipo $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$. La derivata prima rispetto al tempo di questa funzione è $\frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t+\phi)$, mentre la derivata seconda è $\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t+\phi)$. Sostituendo le ultime due uguaglianze nell'equazione differenziale si ottiene

$$-A\omega^2\cos(\omega t + \phi) = -A\frac{k}{m}\cos(\omega t + \phi)$$

Quindi per $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$

$$x(t) = A\frac{k}{m}\cos(\omega t + \phi)$$

fornisce le soluzioni dell'equazione differenziale (1.35). L'ampiezza A e la costante di fase ϕ sono univocamente determinate dalla posizione e dalla velocità iniziali del corpo oscillante.

1.6 Carica di un condensatore nel circuito RC

Esercizio 1.8 (Circuito RC)**.** *Si consideri il cicuito elettrico descritto in figura, formato da un condensatore di capacità C, da una resistenza R e da una forza elettromotrice E_0 costante nel tempo. Si determini la tensione $\nu = \nu(t)$ del condensatore all'istante t.*

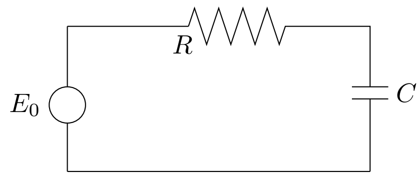

Fig. 1 - Circuito elettrico RC.

Soluzione.

1. Deve valere la legge di Kirchhoff alle maglie (*la somma algebrica delle tensioni in ogni maglia deve essere nulla*), cioè

$$\nu_R + \nu = E_0 \tag{1.36}$$

dove ν_R è la tensione dovuta alla resistenza R e ν è la tensione sulle armature del condensatore.

2. Deve valere la legge di Kirchhoff ai nodi (*in ogni nodo la somma delle correnti in entrata deve uguagliare la somma delle correnti in uscita*), cioè

$$i_R(t) = i_C(t) \tag{1.37}$$

Dall'uguaglianza (1.36) si ottiene

$$\begin{aligned} E_0 &= \nu_R + \nu \\ &= Ri_R + \nu \qquad \text{(Legge di Ohm: } \nu_R = Ri_R) \\ &= Ri_C + \nu \qquad \text{(Da (1.37), } Ri_R = Ri_C) \\ &= RC\frac{d\nu}{dt} + \nu \quad \text{(Legge caratteristica di un condensatore: } i = C\tfrac{d\nu}{dt}) \end{aligned}$$

Quindi l'equazione differenziale che descrive il processo di carica di un circuito elettrico RC è

$$\frac{d\nu}{dt} + \frac{1}{RC}\nu(t) = \frac{E_0}{RC} \tag{1.38}$$

Esercizio 1.9. *Utilizzando il metodo di separazione delle variabili determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale* (1.38)

1.7 Sistema idraulico semplice.

Flusso attraverso una condotta. Si consideri un fluido incomprimibile di densità costante δ che scorre con velocità $\mathbf{v}$ (costante in direzione e modulo) all'interno di una condotta di sezione c. La quantità di fluido che attraversa la sezione c nell'intervallo di tempo che va da

t a $t + dt$ occupa un volume pari a $dV = cvdt$, mentre il volume di fluido che attraversa la superficie c nell'unità di tempo è

$$\frac{dV}{dt} = vc \tag{1.39}$$

Tale quantità è detta *flusso di* $\boldsymbol{v}$ *attraverso* c (o anche *portata della condotta* relativa al fluido in esame).

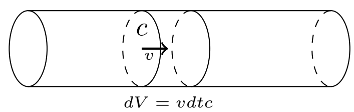

Fig. 2 - Flusso attraverso la sezione c di una condotta.

Esercizio 1.10. *Nel sistema idraulico rappresentato in figura il serbatoio* 1 *(detto serbatoio generatore) è collegato al serbatoio* 2 *mediante una condotta. Supposto di mantenere costante l'altezza* h_1 *del fluido nel serbatoio* 1*, si descriva il modo con cui varia l'altezza* $h = h(t)$ *del serbatoio* 2 *in funzione del tempo* t*.*

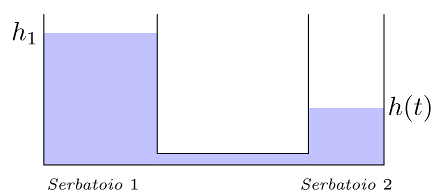

Fig. 3 - Sistema idraulico semplice.

Soluzione. 1) Si fissi l'attenzione sulla condotta.

Il flusso attraverso la sezione c della condotta è

$$\frac{dV}{dt} = cv(t) \tag{1.40}$$

dove v è la velocità (costante in direzione e modulo) del fluido.

Supposto (ipotesi avvalorata da dati e misure sperimentali) che la velocità v sia proporzionale alla differenza $h_1 - h$ tra le altezze del fluido nei due serbatoi, cioè $h_1 - h = kv$, l'uguaglianza (1.40) si può scrivere così

$$\frac{dV}{dt} = \frac{c}{k}[h_1 - h] = \frac{h_1 - h}{R} \tag{1.41}$$

dove $R = \frac{k}{c}$ indica la resistenza idraulica della condotta.

2) Si fissi ora l'attenzione sul serbatoio 2.

Il flusso attraverso la sezione C del serbatoio 2 è

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dCh}{dt} = C\frac{dh}{dt} \tag{1.42}$$

Poichè il fluido ha densità costante vale il principio di conservazione delle masse, pertanto uguagliando (1.41) e (1.42) si ottiene l'equazione differenziale che descrive il sistema idraulico in esame: $\frac{1}{R}[h_0 - h(t)] = C\frac{dh}{dt}$, ovvero

$$\frac{dh}{dt} + \frac{1}{CR}h(t) = \frac{h_1}{CR} \tag{1.43}$$

La seguente figura cerca di sintetizzare le argomentazioni appena fatte.

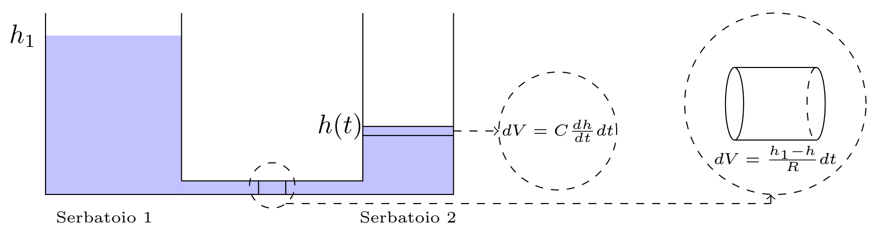

Fig. 4 - Il volume di fluido che attraversa la sezione della condotta nell'intervallo dt eguaglia il volume di fluido che attraversa la sezione del serbatoio 2 nel medesimo intervallo di tempo.

Esercizio 1.11. *Determinare l'integrale particolare dell'equazione differenziale (1.43) supponendo che all'istante $t = 0$ l'altezza h del serbatoio 2 sia zero. In altri termini si risolva il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} + \frac{1}{CR}h(t) = \frac{h_1}{CR}, \\ \\ h(0) = 0 \end{cases} \tag{1.44}$$

Soluzione. $h(t) = h_1 - h_1 e^{-\frac{1}{CR}t}$.

Osservazione. Si noti che l'equazione differenziale che descrive il sistema idraulico semplice è identica a quella che descrive il processo di carica di un condensatore in un circuito RC. Confrontando le equazioni differenziali (1.43) e (1.38) si scrivano (esercizio) le relazioni di analogia tra le grandezze che descrivono i due sistemi.

1.8 Crescita di una popolazione: un altro modello.

Se analizziamo l'evoluzione demografica di certe popolazioni su un intervallo di tempo sufficientemente lungo la curva di crescita non è quasi mai del tipo $N(t) = N_0 e^{kt}$, come abbiamo previsto nella sezione precedente. In molti casi infatti, il numero di individui della popolazione cresce in modo esponenziale per un certo intervallo di tempo ma successivamente tende ad stabilizzarsi attorno ad un ben determinato valore. Ciò è dovuto al fatto che quando la popolazione diventa 'troppo numerosa' si inibisce il tasso di natalità e accresce il tasso di mortalità; chiamiamo questo fenomeno "effetto di sovrappopolazione". Come tener conto di questo fatto nell'equazione differenziale (**??**)? Dovremo modificare tale equazione nel modo seguente

$$\frac{dN}{dt} = kN - \text{“effetto di sovrappopolazione ”}$$

Ora, nell'ipotesi che *l'effetto di sovrappopolazione sia proporzionale al quadrato della popolazione* otteniamo $\frac{dN}{dt} = kN - mN^2$, $k, m > 0$ e infine, se all'istante $t = 0$ il numero di individui della popolazione è $N(0) = N_0 (> 0)$, otteniamo la seguente equazione differenziale alle condizioni iniziali

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = (k - mN)N, \quad k, m > 0, \\ N(0) = N_0 \end{cases} \tag{1.45}$$

le cui soluzioni si possono determinare nel modo che segue: scriviamo l'equazione differenziale (1.45) nella forma

$$\frac{1}{kN - mN^2} \frac{dN}{dt} = 1 \tag{1.46}$$

e scomponiamo il termine $\frac{1}{kN-mN^2}$ in 'fratti semplici': $\dfrac{1}{kN - mN^2} = \dfrac{1}{k}\Big(\dfrac{m}{k - mN} + \dfrac{1}{N}\Big).$
Integriamo ora tra 0 e t l'equazione 1.46:

$$\frac{1}{k} \int_0^t \Big(\frac{m}{k - mN} + \frac{1}{N}\Big) \frac{dN}{dt} dt = \int_0^t dt \tag{1.47}$$

Notiamo che i tasso di crescita iniziale è $\frac{dN}{dt}|_{t=0} = (k - mN_0)N_0$, pertanto se per $t = 0$ il tasso di crescita è positivo si ha $(k - mN_0) > 0$ e cioè $N_0 < \frac{k}{m}$ mentre se è negativo si ha $N_0 > \frac{k}{m}$. Nei calcoli che seguono si suppone che il tasso di crescita $\frac{dN}{dt}$ non cambi mai di segno, ciò significa che

- se $N_0 < \frac{k}{m}$ (tasso di crescita iniziale positivo) allora $N < \frac{k}{m}$, per ogni t (il tasso di crescita risulta positivo in ogni altro istante di tempo).

- se $N_0 > \frac{k}{m}$ (tasso di crescita iniziale negativo) allora $N > \frac{k}{m}$, per ogni t (il tasso di crescita risulta negativo in ogni altro istante di tempo).

$$\Big[- \ln(k - mN) + \ln(N) \Big]_0^t = kt \tag{1.48}$$

$$\ln\Big(\frac{N}{k - mN}\Big) - \ln\Big(\frac{N_0}{k - mN_0}\Big) = kt \tag{1.49}$$

Passando a forma esponenziale ricaviamo

$$\frac{N}{k-mN} = \frac{N_0}{k-mN_0}e^{kt} \tag{1.50}$$

Posto $A_0 = \frac{N_0}{k-mN_0}$ la (1.50) diventa

$$\frac{N}{k-mN} = A_0 e^{kt} \tag{1.51}$$

e con un po' di algebra (e di pazienza) si ottiene la soluzione del problema di Cauchy (1.45) nella forma seguente

$$N(t) = \frac{kA_0e^{kt}}{1+mA_0e^{kt}} \tag{1.52}$$

La soluzione trovata è una funzione che possiamo studiare con i soliti metodi del calcolo differenziale. Elenchiamo qui di seguito alcune sue proprietà.

Caso n.1 Tasso di crescita positivo, cioè $N < \frac{k}{m}$ per ogni $t \geq 0$.

a. $N(t)$ è crescente per ogni $t \geq 0$

b. Per t che tende a $+\infty$ la funzione $N(t)$ tende a $\frac{k}{m}$.

c. $N(t)$ presenta un flesso nel punto in $t_f, N(t_f)$ la cui ordinata vale $N(t_f) = \frac{1}{2}\frac{k}{m}$.

La proprietà b. ha un significato importante in demografia in quanto predice lo stato stazionario di ogni popolazione che si possa ritenere ragionevolmente governata da un'equazione del tipo 1.45. Inoltre (proprietà c.), nel punto di flesso il numero $N(t_f)$ di individui della popolazione è esattamente la metà del valore allo stato stazionario. Pertanto, se la popolazione in esame ha già oltrepassato il punto di flesso si può predire il numero di individui della popolazione allo stato stazionario.

Caso n.2 Tasso di crescita negativo, cioè $N > \frac{k}{m}$ per ogni $t \geq 0$.

1. $N(t)$ è decrescente per ogni $t \geq 0$

2. Per t che tende a $+\infty$ la funzione $N(t)$ tende a $\frac{k}{m}$.