

Funzioni.

Mauro Saita

e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Ottobre 2015.

Indice

1	Funzioni	1
1.1	Composizione di funzioni	2
1.2	Proprietà della composizione di funzioni	3
1.3	Funzioni invertibili o isomorfismi	3
1.4	Funzioni iniettive, suriettive e biunivoche	4
1.5	Due diversi impieghi delle funzioni	8
1.6	Funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R}	10
2	Esercizi	12
2.1	Suggerimenti e risposte	16

1 Funzioni

Definizione 1.1 (Funzione). *Una funzione f da A in B consiste di:*

1. *un insieme A detto dominio della funzione;*
2. *un insieme B detto codominio della funzione;*
3. *una regola o azione f che assegna ad ogni elemento a del dominio un unico elemento b del codominio.*

L'elemento b si chiama *immagine* di a tramite f e si indica con il simbolo $f(a)$ (si legge: “ f di a ”). Si scrive

$$A \xrightarrow{f} B$$

(oppure $f : A \longrightarrow B$) per denotare una funzione f il cui dominio è A e il cui codominio è B .

Definizione 1.2 (Immagine di una funzione). *Si chiama immagine $\text{Im } f$ della funzione $A \xrightarrow{f} B$ il sottoinsieme del codominio*

$$\text{Im } f = \{y \in B \mid \exists x \in A \ f(x) = y\}$$

⁰Nome file: funzioni_2015_def.tex

Definizione 1.3 (Controimmagine). *Si consideri la funzione $A \xrightarrow{f} B$ e un elemento b del codominio. Si chiama controimmagine di b mediante f (e si scrive “ $f^{-1}(b)$ ”) il sottoinsieme di A così definito*

$$f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$$

L'insieme $f^{-1}(b)$ si chiama anche *fibra di f sull'elemento b* . Esso può essere formato da uno o più elementi oppure coincidere con l'insieme vuoto.

Una funzione per la quale il dominio sia uguale al codominio, si chiama *endofunzione*.

Funzione identità.

Per ogni insieme A , esiste una particolare endofunzione, detta *funzione identità di A* che si denota con la scrittura:

$$A \xrightarrow{1_A} A$$

La funzione identità di A è definita nel modo seguente: il dominio e il codominio di 1_A sono l'insieme A stesso e

$$1_A(x) = x$$

per ogni elemento x in A .

1.1 Composizione di funzioni

Se f e g sono due funzioni per le quali *il codominio di f coincide con il dominio di g* , ossia

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

allora si può costruire una nuova funzione $g \circ f$

$$A \xrightarrow{g \circ f} C$$

definendo

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

per ogni x in A .

Si può visualizzare la situazione con il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & B \\
 & \searrow^{g \circ f} & \downarrow g \\
 & & C
 \end{array}$$

Si noti che la funzione composta $g \circ f$ non è sempre definita: è definita soltanto quando il codominio di f coincide con il dominio di g .

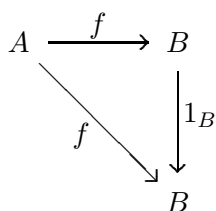
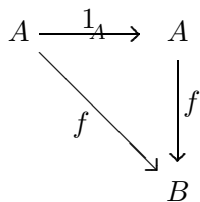
1.2 Proprietà della composizione di funzioni

Valgono inoltre le leggi seguenti:

LEGGI D'IDENTITÀ'. Se $A \xrightarrow{f} B$, allora

$$f \circ 1_A = f \quad \text{e} \quad 1_B \circ f = f \quad (1.1)$$

Dunque commutano i diagrammi:



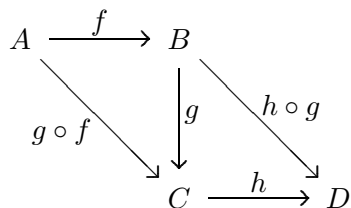
LEGGE ASSOCIATIVA. Se

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

allora

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \quad (1.2)$$

Dunque per la legge dell'associatività, il diagramma seguente commuta:



La legge associativa permette di tralasciare la parentesi e scrivere semplicemente $h \circ g \circ f$.

1.3 Funzioni invertibili o isomorfismi

Definizione 1.4 (Funzione invertibile). Una funzione $A \xrightarrow{f} B$ si dice invertibile (o un isomorfismo dall'insieme A all'insieme B) se esiste una funzione $B \xrightarrow{g} A$ per cui risulti:

$$g \circ f = 1_A \quad \text{e} \quad f \circ g = 1_B$$

Una tale funzione g (se esiste) si chiama funzione inversa di f .

Se $A \xrightarrow{f} B$ è invertibile la sua inversa è unica. Vale infatti il seguente

Teorema 1.5. *Sia $A \xrightarrow{f} B$ una funzione invertibile. Se $B \xrightarrow{g} A$, $B \xrightarrow{g'} A$ sono entrambe inverse di f allora $g = g'$.*

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} g &= g \circ 1_B && \text{(definizione di funzione identità)} \\ &= g \circ (f \circ g') && (g' \text{ è l'inversa di } f) \\ &= (g \circ f) \circ g' && \text{(proprietà associativa della composizione di funzioni)} \\ &= 1_A \circ g' && (g \text{ è l'inversa di } f) \\ &= g' && \text{(definizione di funzione identità)}. \end{aligned}$$

Se $A \xrightarrow{f} B$ ha inversa, allora l'inversa (che è unica) si denota con il simbolo f^{-1} .

Definizione 1.6. *Si dice che due insiemi A e B hanno la stessa cardinalità (o che sono isomorfi) se esiste una funzione invertibile (un isomorfismo) $A \xrightarrow{f} B$.*

Teorema 1.7. *Siano $X \xrightarrow{f} Y$ e $Y \xrightarrow{g} Z$ funzioni invertibili. Allora $X \xrightarrow{g \circ f} Z$ è invertibile e*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Dimostrazione.

Per definizione di inversa, per dimostrare che $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ si deve provare che

$$(g \circ f)(f^{-1} \circ g^{-1}) = 1_Z$$

e

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(g \circ f) = 1_X.$$

Ora

$$\begin{aligned} (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} \\ &= g \circ g^{-1} \\ &= 1_Z. \end{aligned}$$

Analogamente si prova $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = 1_X$.

1.4 Funzioni iniettive, suriettive e biunivoche

Definizione 1.8 (Funzione iniettiva). *Una funzione $A \xrightarrow{f} B$ si dice iniettiva se soddisfa la seguente proprietà di unicità: ogni elemento $b \in B$ ha al più una controimmagine in A .*

In altri termini, f è iniettiva se vale una delle due seguenti proprietà tra loro equivalenti

$$(i) \quad \forall a_1, a_2 \in A \quad f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2$$

$$(ii) \quad \forall a_1, a_2 \in A \quad a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2)$$

Quindi, una funzione $A \xrightarrow{f} B$ iniettiva associa a elementi distinti del dominio elementi distinti del codominio.

Definizione 1.9 (Funzione suriettiva). *Una funzione $A \xrightarrow{f} B$ si dice suriettiva se soddisfa la seguente proprietà di esistenza: ogni elemento di $b \in B$ possiede almeno una controimmagine in A , cioè*

$$\forall b \in B \quad \exists a \in A \mid f(a) = b.$$

In altre parole f è se suriettiva se

$$\text{Im}(f) = B$$

Definizione 1.10 (Funzione biunivoca). *Una funzione $A \xrightarrow{f} B$ si dice biunivoca (o bigettiva) se è iniettiva e suriettiva.*

Proposizione 1.11. *Sia $A \xrightarrow{f} B$ una funzione da un insieme $A \neq \emptyset$ a un insieme B . Allora le due condizioni seguenti sono equivalenti:*

(i) f è iniettiva;

(ii) f ha un'inversa sinistra, cioè esiste una funzione $B \xrightarrow{g} A$ (non necessariamente unica) per la quale $g \circ f = 1_A$.

Dimostrazione.

(i) \Rightarrow (ii)

Si deve trovare una $B \xrightarrow{g} A$ in modo tale che $g \circ f = 1_A$. Per ogni $b \in B$, si definisce $g(b)$ nel modo seguente:

se $b \in \text{Im}(f)$, esiste, per ipotesi, esattamente un $a \in A$ per il quale $f(a) = b$; si pone allora per definizione $g(b) = a$;

se invece $b \notin \text{Im}(f)$, si definisce $g(b) \in A$ in modo del tutto arbitrario: per esempio, si sceglie un elemento $a_0 \in A (\neq \emptyset)$ e per ogni $b \in B, b \notin \text{Im}(f)$, si pone $g(b) = a_0$.

Allora è facile vedere che $g \circ f = 1_A$. Naturalmente di inversa sinistra ne può esistere più d'una.

(ii) \Rightarrow (i)

Per ogni $a_1, a_2 \in A$

$$f(a_1) = f(a_2) \implies g(f(a_1)) = g(f(a_2)) \implies a_1 = a_2.$$

Dunque f è iniettiva.

Proposizione 1.12. *Sia $A \xrightarrow{f} B$ una funzione da un insieme A a un insieme B . Allora le due condizioni seguenti sono equivalenti:*

(i) f è suriettiva;

(ii) f ha un'inversa destra, cioè esiste una funzione $B \xrightarrow{g} A$ (non necessariamente unica) per la quale $f \circ g = 1_B$.

Dimostrazione.

(i) \Rightarrow (ii)

Si deve trovare una $B \xrightarrow{g} A$ in modo tale che $f \circ g = 1_B$. Per ogni $b \in B$, si definisce $g(b)$ nel modo seguente: $b \in \text{Im}(f)$, perchè f è suriettiva per ipotesi. Quindi esiste, *almeno un* $a \in A$ per il quale $f(a) = b$; si pone allora per definizione $g(b) = a$ (per ogni b in B la scelta dell'elemento a può essere fatta in almeno un modo).

Allora è facile vedere che $f \circ g = 1_B$. Naturalmente di inversa destra ne può esistere più d'una.

(ii) \Rightarrow (i)

$f \circ g = 1_B$ per ipotesi. Allora per ogni $b \in B$ $(f \circ g)(b) = f(g(b)) = b$; esiste dunque un elemento $a = g(b) \in A$ per il quale $f(a) = b$; di conseguenza f è suriettiva. ■

Proposizione 1.13. *Siano A, B insiemi. Una funzione $A \xrightarrow{f} B$ è biunivoca se e solo se è invertibile*

Prima dimostrazione.

$$\begin{array}{c} A \xrightarrow{f} B \text{ biunivoca} \\ \Downarrow \\ A \xrightarrow{f} B \text{ iniettiva e suriettiva} \\ \Downarrow \\ A \xrightarrow{f} B \text{ ha un'inversa sinistra e un'inversa destra} \end{array}$$

Siano $B \xrightarrow{g_1} A$ e $B \xrightarrow{g_2} A$ rispettivamente un'inversa sinistra e un'inversa destra di f

$$g_1 \circ f = 1_A \quad \text{e} \quad f \circ g_2 = 1_B$$

Allora g_1 e g_2 coincidono, infatti

$$\begin{aligned} g_1 &= g_1 \circ (f \circ g_2) \\ &= (g_1 \circ f) \circ g_2 && \text{proprietà associativa} \\ &= 1_A \circ g_2 && \text{definizione di inversa sinistra} \\ &= g_2 && \text{legge d'identità} \end{aligned}$$

Quindi esiste una funzione $g (= g_1 = g_2)$ che è contemporaneamente inversa sinistra e inversa destra di f . Pertanto $A \xrightarrow{f} B$ è invertibile. ■

Seconda dimostrazione.

f biunivoca $\Rightarrow f$ invertibile.

f è suriettiva cioè per ogni $y \in B$ esiste almeno un $x \in A$ per il quale $f(x) = y$; essendo f anche iniettiva l'elemento x trovato è unico. Quindi è ben definita la funzione, chiamiamola $B \xrightarrow{g} A$, che a ogni y in

B associa l'unico x in A per il quale $f(x) = y$. Pertanto, per ogni y in B , $f(g(y)) = y$, cioè $f \circ g = 1_B$. D'altra parte, per il modo stesso in cui g è definita, per ogni $x \in A$, vale $g(f(x)) = x$, cioè $g \circ f = 1_A$. Quindi f è invertibile.

f invertibile $\Rightarrow f$ biunivoca.

Per ipotesi esiste la funzione inversa di f , chiamiamola $B \xrightarrow{g} A$.

f è iniettiva. Infatti se per ogni $x_1, x_2 \in A$ $f(x_1) = f(x_2)$, applicando la funzione g , si ottiene $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, vale a dire $x_1 = x_2$ perchè $g \circ f$ è l'identità di A .

f è suriettiva. Infatti, sia y in B . Poichè $f \circ g = 1_B$, si ha $y = (f \circ g)(y) = f(g(y))$. Posto $g(y) = x$ si ottiene $y = f(x)$. ■

Proposizione 1.14. Siano $A(\neq \emptyset), B, C$ insiemi e $A \xrightarrow{f} B, B \xrightarrow{g} C$ funzioni. Allora valgono le seguenti proposizioni

- (a) f, g iniettive $\Rightarrow g \circ f$ iniettiva.
- (b) f, g suriettive $\Rightarrow g \circ f$ suriettiva.
- (c) $g \circ f$ iniettiva $\Rightarrow f$ iniettiva.
- (d) $g \circ f$ suriettiva $\Rightarrow g$ suriettiva.

Dimostrazione.

(a) 1^a *Dimostrazione.* Una funzione (con dominio non vuoto) è iniettiva se e solo se ha un'inversa sinistra (proposizione 1.11). Siano allora $B \xrightarrow{h} A$ e $C \xrightarrow{k} B$ inverse sinistre rispettivamente di f e g : questo significa che $h \circ f = 1_A$ e $k \circ g = 1_B$. Allora

$$\begin{aligned} (h \circ k) \circ (g \circ f) &= h \circ (k \circ g) \circ f && \text{(proprietà associativa delle funzioni)} \\ &= h \circ 1_B \circ f && \text{(} k \text{ è inversa sinistra di } g \text{)} \\ &= h \circ f && \text{(legge d'identità)} \\ &= 1_A && \text{(} h \text{ è inversa sinistra di } f \text{)} \end{aligned}$$

Questo prova che $h \circ k$ è un'inversa sinistra di $g \circ f$, e quindi che $g \circ f$ è iniettiva. ■

(a) 2^a *Dimostrazione.* Per ogni $x_1, x_2 \in A$:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) &\iff g(f(x_1)) = g(f(x_2)) && \text{(definizione di } g \circ f \text{)} \\ &\implies f(x_1) = f(x_2) && \text{(} g \text{ è iniettiva)} \\ &\implies x_1 = x_2 && \text{(} f \text{ è iniettiva)} \end{aligned}$$

Questo prova che $g \circ f$ è iniettiva ■

(b) *Dimostrazione.* Una funzione è suriettiva se e solo se ha un'inversa destra (proposizione 1.12). Siano allora $B \xrightarrow{h} A$ e $C \xrightarrow{k} B$ inverse destre rispettivamente di f e g : questo significa che $f \circ h = 1_B$ e $g \circ k = 1_C$. Allora

$$\begin{aligned}
(g \circ f) \circ (h \circ k) &= g \circ (f \circ h) \circ k && \text{(proprietà associativa delle funzioni)} \\
&= g \circ 1_B \circ k && \text{(} h \text{ è inversa destra di } f \text{)} \\
&= g \circ k && \text{(legge d'identità)} \\
&= 1_A && \text{(} k \text{ è inversa destra di } g \text{)}
\end{aligned}$$

Questo prova che $h \circ k$ è un'inversa destra di $g \circ f$, e quindi che $g \circ f$ è suriettiva. ■

(c) 1^a *Dimostrazione.* Per ipotesi $g \circ f$ è iniettiva, quindi ha un'inversa sinistra (Teorema 1.11). Questo significa che esiste $C \xrightarrow{h} A$ per la quale $h \circ (g \circ f) = 1_A$. Per l'associatività della composizione di funzioni:

$$1_A = h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Ma allora $h \circ g$ è un'inversa sinistra di f , e pertanto f è iniettiva. ■

(c) 2^a *Dimostrazione.* Per ogni $x, x' \in X$:

$$\begin{array}{rcl}
f(x_1) & = & f(x_2) \\
\downarrow & & \\
g(f(x_1)) & = & g(f(x_2)) \\
\Downarrow & & \\
(g \circ f)(x_1) & = & (g \circ f)(x_2) \\
\Downarrow & & (g \circ f \text{ è iniettiva}) \\
x_1 & = & x_2
\end{array}$$

Questo prova che f è iniettiva.

(d) *Dimostrazione.* Per ipotesi $g \circ f$ è suriettiva, quindi ha un'inversa destra (Teorema 1.12). Questo significa che esiste $C \xrightarrow{h} A$ per la quale $(g \circ f) \circ h = 1_C$. Per l'associatività della composizione di funzioni:

$$1_C = (g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$$

Ma allora $f \circ h$ è un'inversa destra di g , e pertanto g è suriettiva. ■

1.5 Due diversi impieghi delle funzioni

Le funzioni vengono utilizzate in moltissime situazioni; qui si descrivono due impieghi molto frequenti del concetto di funzione.

Primo aspetto. Classificare il dominio mediante una proprietà.

Sia $X \xrightarrow{g} B$ una funzione da un insieme X a un insieme B . La controimmagine di $b \in B$ tramite g è il sottoinsieme (del dominio) definito da $g^{-1}\{b\} = \{x \in X \mid g(x) = b\}$

La funzione $X \xrightarrow{g} B$ può essere pensata come *una famiglia di sottoinsiemi* del dominio

$$g^{-1}\{b\}, \quad b \in B$$

indicata con gli elementi del codominio.

Se nessuna fibra è vuota (cioè se g è suriettiva), si dice che $\{g^{-1}\{b\}\}_{b \in B}$ è una *partizione* di X .

Esempio.

Si consideri la funzione $\mathbb{Z} \xrightarrow{g} \{0, 1\}$,

$$g(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z \text{ è pari} \\ 1 & \text{se } z \text{ è dispari} \end{cases}$$

Si può pensare a g come alla partizione di \mathbb{Z} nelle due fibre

$$g^{-1}\{0\} = \{\text{numeri pari}\}, \quad g^{-1}\{1\} = \{\text{numeri dispari}\}$$

Secondo aspetto. Nominare il codominio.

Sia $A \xrightarrow{f} X$ una funzione da un insieme A a un insieme X .

La funzione $A \xrightarrow{f} X$ può essere pensata come *una famiglia di elementi di X* ‘etichettata’ dagli elementi di A . In altre termini, per ogni a in A si può scrivere f_a al posto di $f(a)$. Allora la funzione $A \xrightarrow{f} X$ può essere pensata come una famiglia $\{f_a\}_{a \in A}$ di elementi del codominio indicata dal dominio.

Esempio. Una successione di numeri reali $\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ è una famiglia (infinita) $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di numeri reali indicata da \mathbb{N} :

$$f_0, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$$

Esempio. Se $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ e $X = \{a, b, c, \dots, z\}$ è l’alfabeto della lingua italiana, allora la funzione $A \xrightarrow{f} X$ è una parola di lunghezza n . Anche in questo caso si è portati a vedere una parola f come una famiglia di elementi del codominio X (vale a dire una famiglia di lettere dell’alfabeto) indicata da A .

1.6 Funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} .

Definizione 1.15 (Grafico di una funzione). Sia $A \xrightarrow{f} B$ una funzione. Il grafico G_f di f è il sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$

$$G(f) = \{(a, b) \in A \times B \mid b = f(a)\}$$

Esempio. Il grafico della funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{\cos} \mathbb{R}$ è il sottoinsieme di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ così definito

$$G_{\cos} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \cos x\}$$

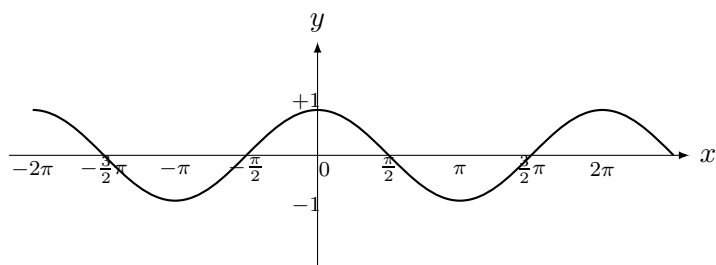


Figura 1: Grafico della funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{\cos} \mathbb{R}$.

Sia $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione *non* invertibile. In molti casi è possibile restringere opportunamente dominio e codominio di f in modo tale da avere una funzione invertibile (iniettiva e suriettiva). Per esempio $\mathbb{R} \xrightarrow{\cos} \mathbb{R}$ non è invertibile mentre $[0, \pi] \xrightarrow{\cos} [-1, 1]$ lo è. La funzione inversa del coseno

$$[-1, 1] \xrightarrow{\cos^{-1}} [0, \pi]$$

è la funzione *arcocoseno* (si scrive *arcos*).

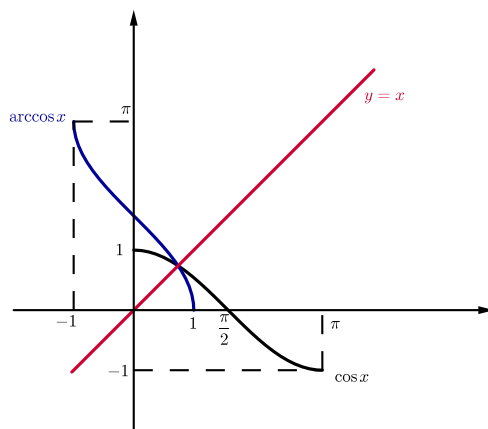


Figura 2: Grafico di $[0, \pi] \xrightarrow{\cos} [-1, 1]$ (in nero); grafico di $[-1, 1] \xrightarrow{\arccos} [0, \pi]$ (in blu).

Il grafico $G_{f^{-1}}$ di f^{-1} è il simmetrico di G_f rispetto alla retta $y = x$.

Definizione 1.16 (Zeri di una funzione). Si consideri il sottoinsieme D di \mathbb{R} e la funzione $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $y = f(x)$. Gli zeri di f sono gli elementi $x \in D$ per i quali risulta

$$f(x) = 0$$

Gli zeri di f sono le ascisse dei punti di intersezione del grafico G_f di f con l'asse x .

Definizione 1.17 (Punti fissi di una funzione). Si consideri il sottoinsieme D di \mathbb{R} e la funzione $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $y = f(x)$. I punti fissi di f sono gli elementi $x \in D$ per i quali risulta

$$f(x) = x$$

I punti fissi di f sono le ascisse dei punti di intersezione del grafico G_f di f con la retta di equazione $y = x$ (bisettrice primo-terzo quadrante).

Definizione 1.18 (Funzione pari). La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $y = f(x)$ è pari se vale la proprietà

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = f(x)$$

Se f è pari il grafico G_f di f è simmetrico rispetto alla retta $x = 0$ (asse y).

La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{\cos} \mathbb{R}$ è pari, sono funzioni pari tutte le funzioni polinomiali del tipo $p(x) = a_{2n}x^{2n} + \dots + a_2x^2 + a_0$ (cioè i polinomi in cui compaiono esclusivamente esponenti pari).

Definizione 1.19 (Funzione dispari). La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $y = f(x)$ è dispari se vale la proprietà

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = -f(x)$$

Se f è dispari il grafico G_f di f è simmetrico rispetto all'origine O degli assi cartesiani.

La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{\sin} \mathbb{R}$ è dispari, sono funzioni dispari tutte le funzioni polinomiali del tipo $p(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + \dots + a_3x^3 + a_1x$ (cioè i polinomi in cui compaiono esclusivamente esponenti dispari).

Dalle simmetrie delle funzioni $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ si deduce la simmetria della funzione prodotto $h = fg$ (attenzione, $h = fg$ indica il prodotto puntuale di funzioni e non la loro composizione). Si ha:

1. Se f e g sono pari allora fg è pari
2. Se f e g sono dispari allora fg è pari
3. Se f è pari e g è dispari allora fg è dispari

Le precedenti proposizioni sono riassunte nella seguente tabella (la loro dimostrazione, molto semplice, è lasciata per esercizio).

	f pari	f dispari
g pari	fg pari	fg dispari
g dispari	fg dispari	fg pari

2 Esercizi

Esercizio 2.1. Per ognuna delle seguenti funzioni

- (a) si disegni il grafico qualitativo.
- (b) si dica se la funzione è iniettiva, suriettiva, invertibile.
- (c) se la funzione è invertibile si determini dominio, codominio e l'espressione analitica della funzione inversa. Infine, si disegni il grafico della funzione inversa.

- | | | |
|-----|---|--|
| 1. | $\mathbb{R}_{\geq 0} \xrightarrow{f} \mathbb{R},$ | $f(x) = x^2$ |
| 2. | $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{\geq 0}$ | $f(x) = x^2$ |
| 3. | $\mathbb{R}_{> 0} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{> 0}$ | $f(x) = \frac{1}{x}$ |
| 4. | $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ | $f(x) = x^3$ |
| 5. | $\mathbb{R}_{\geq 0} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{\geq 0}$ | $f(x) = \sqrt{x}$ |
| 6. | $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ | $f(x) = \sqrt[3]{x}$ |
| 7. | $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ | $f(x) = 2 \cos x$ |
| 8. | $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ | $f(x) = 3 \sin 2x$ |
| 9. | $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ | $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$ |
| 10. | $\mathbb{R} \setminus \{1\} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \setminus \{0\}$ | $f(x) = \frac{1}{x-1}$ |
| 11. | $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{\geq 0}$ | $f(x) = x $ |
| 12. | $\mathbb{R} \setminus \{1\} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \setminus \{2\}$ | $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$ |
| 13. | $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{> 0}$ | $f(x) = 2^x$ |
| 14. | $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ | $f(x) = 2^x$ |
| 15. | $\mathbb{R}_{> 0} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ | $f(x) = \log_2 x = \text{logaritmo in base 2 di } x$ |

R

Esercizio 2.2. La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 5x$ è iniettiva? è suriettiva? Trovare, se esistono, gli zeri di f .

R

Esercizio 2.3. Trovare l'immagine $\text{Im } f$ e il numero di punti fissi della funzione

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 3$$

Interpretare, servendosi del grafico della funzione, i punti fissi di f .

R

Esercizio 2.4. Si considerino le funzioni

$$\begin{array}{ll} 1. & \mathbb{R}_{\geq 0} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{\geq 0} \quad f(x) = 3x + 2 \\ 2. & \mathbb{R}_{\geq 0} \xrightarrow{g} \mathbb{R}_{\geq 0} \quad g(x) = \sqrt{x} \end{array}$$

Trovare $g \circ f$, $f \circ g$, $\text{Im}(g \circ f)$, $\text{Im}(f \circ g)$.

R

Esercizio 2.5. Sia $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ per ogni x in \mathbb{R} .

1. Determinare i valori di a e b per i quali $f \circ f = f$.
2. Determinare i valori di a e b per i quali $f \circ f = 1_{\mathbb{R}}$ (= identità di \mathbb{R}).
3. Determinare i valori di a e b per i quali f è invertibile.
4. Studiare, al variare di a e b , l'esistenza dei punti fissi di f .

R

Esercizio 2.6. Sia

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, f(x) = mx + q$$

Per quali valori di $m, q \in \mathbb{R}$ la funzione f è pari? Per quali valori è dispari?

R

Esercizio 2.7. Se $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ è pari e $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ è dispari. Cosa si può dire delle funzioni composte $f \circ g, g \circ f, f \circ f, g \circ g$? Sono pari, dispari, né pari né dispari? Motivare le risposte.

R

Esercizio 2.8. Si considerino le funzioni

$$\begin{array}{ll} 1) & \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \quad f(x) = x - 1 \\ 2) & \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \quad g(x) = 3^x \end{array}$$

Trovare $g \circ f$, $f \circ g$, $\text{Im}(g \circ f)$, $\text{Im}(f \circ g)$.

R

Esercizio 2.9. La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{\sin} \mathbb{R}$ è iniettiva? suriettiva? Come si può restringere opportunamente dominio e codominio in modo da ottenere una funzione invertibile? In tal caso, come si chiama l'inversa?

R

Esercizio 2.10 (Galileo). Dimostrare che l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ ha la stessa cardinalità dell'insieme $S = \{0, 1, 4, \dots, n^2, \dots\}$ dei 'quadrati perfetti'. (Si dice che due insiemi X, Y hanno la stessa cardinalità se esiste una funzione invertibile (un isomorfismo) $f : X \rightarrow Y$.)

R

Esercizio 2.11. La funzione $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \xrightarrow{\tan} \mathbb{R}$ è iniettiva? suriettiva? invertibile? Se è invertibile come si chiama l'inversa? Qual è il suo grafico?

R

Esercizio 2.12. Trovare il dominio massimale D in \mathbb{R} , il grafico qualitativo e l'immagine delle funzioni $D \xrightarrow{y} \mathbb{R}$ le cui leggi sono

1. $y = |\sin x|$
2. $y = 2|x| - 1$
3. $y = \arctan x$
4. $y = 2^{|x|}$
5. $y = |\log x|$
6. $y = e^x + 1$
7. $y = e^{|x|}$

R

Esercizio 2.13. Siano $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ due funzioni.

Se f e g sono entrambe pari che cosa si può dire sulla loro somma?

Se f è pari e g è dispari che cosa si può dire sulla loro somma?

R

Esercizio 2.14. Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f_k} \mathbb{R}$,

$$f_k(x) = x + k|x|$$

è invertibile. Tracciare un grafico di f_k e quando esiste di $(f_k)^{-1}$.

R

Esercizio 2.15. Sia $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\cos x - 1}$. Determinare

1. il dominio massimale D di f in \mathbb{R} .

2. l'immagine $\text{Im } f$ di f .

R

Esercizio 2.16. Tracciando grafici di opportune funzioni trovare le soluzioni in \mathbb{R} della disequazione

$$1 - |x| > \sqrt{2 + x}$$

R

Esercizio 2.17. Sia $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 5}}{x + 2}$. Scrivere sotto forma di intervalli, il segno di f .

R

Esercizio 2.18. Sia $\mathbb{R} \setminus \{3\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x + 2}{3 - x}$. Trovare la controimmagine $f^{-1}([1, +\infty))$.

R

2.1 Suggerimenti e risposte

Esercizio 2.1

Per ognuna delle seguenti funzioni

- (a) Verificare la correttezza delle risposte utilizzando un software che disegni grafici, per esempio “Geogebra”.
- (b) e (c) Per verificare iniettività, suriettività e invertibilità è utile utilizzare i grafici trovati al punto precedente.

	iniettiva	suriettiva	invertibile	funzione inversa
1. $\mathbb{R}_{\geq 0} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, f(x) = x^2$	sì	no	no	
2. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{\geq 0}, f(x) = x^2$	no	sì	no	
3. $\mathbb{R}_{> 0} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{> 0}, f(x) = \frac{1}{x}$	sì	sì	sì	$f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$
4. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, f(x) = x^3$	sì	sì	sì	$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$
5. $\mathbb{R}_{\geq 0} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{\geq 0}, f(x) = \sqrt{x}$	sì	sì	sì	$f^{-1}(x) = x^2$
6. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x}$	sì	sì	sì	$f^{-1}(x) = x^3$
7. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, f(x) = 2 \cos x$	no	no	no	
8. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, f(x) = 3 \sin 2x$	no	no	no	
9. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$	no	no	no	
10. $\mathbb{R} \setminus \{1\} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \setminus \{0\}, f(x) = \frac{1}{x-1}$	sì	sì	sì	$f^{-1}(x) = 1 + \frac{1}{x}$
11. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{\geq 0}, f(x) = x $	no	sì	no	
12. $\mathbb{R} \setminus \{1\} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \setminus \{2\}, f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$	sì	sì	sì	$f^{-1}(x) = \frac{x-3}{x-2}$
13. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{> 0}, f(x) = 2^x$	sì	sì	sì	$f^{-1}(x) = \log_2 x$
14. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, f(x) = 2^x$	sì	no	no	
15. $\mathbb{R}_{> 0} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, f(x) = \log_a x$	sì	sì	sì	$f^{-1}(x) = a^x$

Il dominio e codominio della funzione inversa f^{-1} (quando esiste) è rispettivamente il codominio e dominio di f .

Esercizio 2.2 f non è iniettiva, non è suriettiva. Gli zeri di f sono $x = 0$ e $x = 5$.

Esercizio 2.3 $\text{Im } f = [-3, +\infty)$. La funzione f ha esattamente due punti fissi; per convincersene basta intersecare il grafico di f con la retta di equazione $y = x$.

Esercizio 2.4 $[-\frac{2}{3}, +\infty) \xrightarrow{g \circ f} \mathbb{R}, g \circ f(x) = \sqrt{3x+2}$.

$$[0, +\infty) \xrightarrow{g \circ f} \mathbb{R}, f \circ g(x) = 3\sqrt{x} + 2.$$

$$\text{Im } (g \circ f) = [0, +\infty).$$

$$\text{Im } (f \circ g) = [2, +\infty).$$

Esercizio 2.5

- 1) $(a = 0, \forall b \in \mathbb{R}) \circ (a = 1, b = 0)$,
 2) $(a = -1, \forall b \in \mathbb{R}) \circ (a = 1, b = 0)$,
 3) $a \neq 0$, 4) $a \neq 1$.

Esercizio 2.6

f è pari per $m = 0$ e $\forall q$; f è dispari $\forall m$ e $q = 0$.

Esercizio 2.7

$f \circ g$ è pari, $g \circ f$ è pari, $f \circ f$ è pari, $g \circ g$ è dispari.

Esercizio 2.8

$$\mathbb{R} \xrightarrow{g \circ f} \mathbb{R}, g \circ f(x) = 3^{x-1}.$$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f \circ g} \mathbb{R}, f \circ g(x) = 3^x - 1.$$

$$\text{Im}(g \circ f) = (0, +\infty).$$

$$\text{Im}(f \circ g) = (-1, +\infty).$$

Esercizio 2.9

La funzione $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \xrightarrow{f} [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ è invertibile. La sua inversa è

$$[-1, 1] \xrightarrow{f^{-1}} [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}], f^{-1}(x) = \arcsin x$$

Esercizio 2.10

È facile verificare che la funzione $\mathbb{N} \xrightarrow{f} S$, $f(n) = n^2$ è un isomorfismo (funzione invertibile). Pertanto gli insiemi \mathbb{N} e S hanno la stessa cardinalità.

Esercizio 2.11

La funzione $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \xrightarrow{\tan} \mathbb{R}$ è iniettiva, suriettiva e quindi invertibile. La sua inversa è $\mathbb{R} \xrightarrow{\tan^{-1}} [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$, $\tan^{-1}(x) = \arctan x$.

Esercizio 2.12**Esercizio 2.13**

Se f e g sono pari allora $f + g$ è pari, infatti:

$$(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$$

Se f è pari e g è dispari allora $f + g$ non è né pari, né dispari; per esempio $f(x) = x^2$ è pari, $g(x) = x$ è dispari e la funzione somma $(f + g)(x) = x^2 + x$ non è né pari, né dispari.

Esercizio 2.14

Esercizio 2.15 Deve essere $\cos x - 1 \geq 0$, ossia $x = 2k\pi$, con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Pertanto il dominio massimale di f in \mathbb{R} è

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \ k \in \mathbb{N}\}$$

L'immagine $\text{Im } f$ di f è costituita dal solo elemento zero: $\text{Im } f = \{0\}$.

Esercizio 2.16

Esercizio 2.17

Esercizio 2.18

Per determinare $f^{-1}([1, +\infty))$ occorre risolvere la disequazione $\frac{x+2}{3-x} \geq 1$ che è equivalente a $\frac{2x-1}{3-x} \geq 0$. Le soluzioni sono $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leq x < 3\}$.