Note di fisica

Mauro Saita

e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Versione provvisoria, luglio 2012.

Indice

Le note storiche contenute in questi appunti (non gli esercizi) sono tratte dal libro: *George Pólya, Mathematical Methods in Science, Ed. Mathematical Association of America, 1977.* Testo al quale si rimanda per ulteriori approfondimenti.

1 Caduta libera di un corpo pesante

Galileo nacque nel 1564 e morì nel 1642, anno di nascita di Newton. Nel 1636 pubblicò *Discorsi matematici sopra due nuove scienze*, opera che gli garantì grande fama. Sebbene prima di lui molti illustri predecessori, da Aristotele a Leonardo da Vinci, si erano interessati al problema della caduta libera di corpi pesanti, Galileo seppe affrontare il problema da un nuovo punto di vista. Seppe porsi le domande giuste e seppe proporre un metodo di indagine talmente innovativo che, ancora oggi gli vale il titolo di padre fondatore della scienza moderna.

1.1 Il ragionamento di Galileo

Supponiamo che un corpo pesante in caduta libera abbia, al tempo t, velocità v. Galileo formulò l'ipotesi che v fosse direttamente proporzionale a t, cioè $v = \text{costante} \cdot t$. Il valore numerico della costante dipende dalle unità di misura utilizzate per v e t, e di solito si denota con la lettera g. Quindi, in termini algebrici la congettura di Galileo è

$$v = g \cdot t \tag{1.1}$$

Ora, la distanza s percorsa dal corpo durante la caduta dipende dal tempo t, cioè s è funzione del tempo:

$$s = s(t) \tag{1.2}$$

[0]Nome file: 'galileo-caduta-libera.tex'

Il problema che si pone Galileo è questo: se un corpo cade con velocità proporzionale al tempo, qual è lo spazio percorso dal corpo all'istante t? In altri termini

> *Se un corpo cade con velocità*
>
> $$v = g \cdot t$$
>
> *qual è la distanza*
>
> $$s = s(t)$$
>
> *che percorre durante la caduta?*

Galileo intuì che era possibile *interpretare il moto della caduta libera, cioè un moto accelerato, come un caso limite di un moto uniforme (velocità = costante).* Per capire il suo ragionamento, consideriamo dapprima un moto uniforme.

Problema 1.1 (Il caso di un moto uniforme.)**.** *Un auto si muove su una strada rettilinea con velocità v costante. Se $v = 40\,km/h$, qual è la distanza percorsa dall'auto dopo due ore?*

Soluzione.

Se si guida per due ore alla velocità di $40\,km/h$ la distanza percorsa è $80\,km$:

$$80 = 40 \cdot 2$$

Più in generale,

$$\text{distanza percorsa} = \text{velocità uniforme} \cdot \textit{tempo}$$

E, in termini algebrici:

$$s = v \cdot t \tag{1.3}$$

dove v è costante. Nella figura 1 l'ordinata v è costante e il grafico di v rispetto al tempo t risulta essere una linea retta orizzontale. Invece l'area sotto la curva, cioè l'area del rettangolo ombreggiato vale esattamente $v \cdot t$. Così dall'uguaglianza (1.3) si deduce che *la distanza totale percorsa dall'auto è rappresentata dall'area del rettangolo ombreggiato*; tutto ciò, ovviamente, nell'ipotesi che il moto sia uniforme. Questo problema, pur essendo ovvio, è di grande importanza per comprendere l'idea di Galileo.

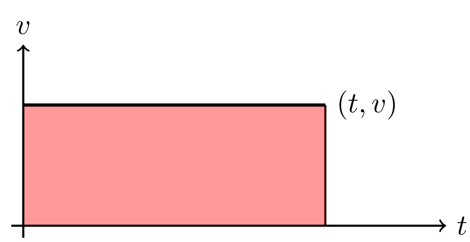

Figura 1: Moto rettilineo con velocità uniforme. Grafico della velocità in funzione del tempo.

Problema 1.2 (Il caso di un moto la cui velocità è proporzionale al tempo)**.** *Un auto parte da ferma e si muove lungo una strada rettilinea con velocità $v = g \cdot t$.*

1. *Qual è il grafico della velocità rispetto al tempo t?*
2. *Qual è la distanza s percorsa dall'auto all'istante t?*

Soluzione.

1. È facile verificare che il grafico di $v = g \cdot t$ è una retta che passa per l'origine con pendenza g:

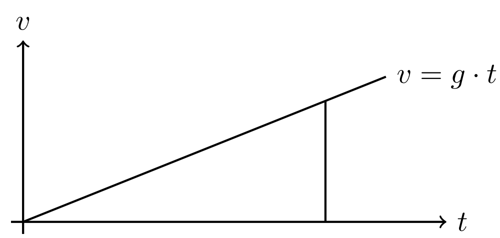

Figura 2: Moto rettilineo con velocità che varia secondo la legge $v = g \cdot t$. Grafico della velocità in funzione del tempo.

2. La risposta alla seconda domanda è più complicata. All'istante $t = 0$ la velocià è nulla perchè l'auto parte da ferma. Poi la velocità comincia a crescere progressivamente con il trascorrere del tempo. Galileo pensa allora di suddividere il tempo in tanti intervalli uguali e immagina che l'auto si muova con velocità costante lungo ogni intervallo e che, al termine di ognuno di essi, l'auto subisca un'accelerazione istantanea. Per esempio (si veda la figura 3), se si divide il tempo in tanti intervalli regolari di un secondo, si può pensare che l'auto si muova con velocità di $0\,m/s$ per il primo secondo, di $5\,m/s$ per il secondo secondo, di $10\,m/s$ per il terzo secondo, di $15\,m/s$ per il quarto secondo e così via.

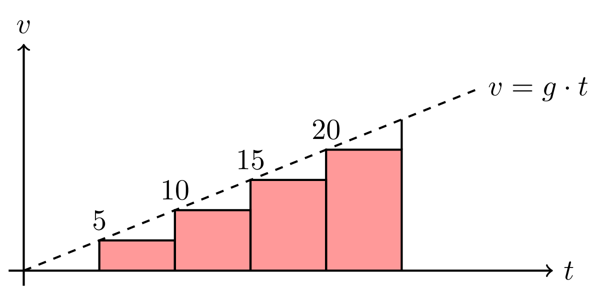

Figura 3: L'idea di Galileo. Un moto non uniforme si può pensare come l'insieme di tanti moti con velocità costante seguiti da un'accelerazione istantanea.

Questa grottesca caricatura del moto reale dell'auto è illustrata in Fig. 3. Ripetiamo, nel primo secondo l'auto si sposta di 0 metri, poi istantaneamente essa accelera fino a raggiungere una velocità di $5\,m/s$. Dopo un secondo di guida tranquilla con questa velocità c'è un altro aumento istantaneo di velocità fino a $10\,m/s$. Segue un secondo di guida a $10\,m/s$, qundi un salto istantaneo di velocità, un secondo di guida a $15\,m/s$, un salto istantaneo di velocità, un secondo di guida a $20\,m/s$ e così via. Le distanze percorse in ogni intervallo sono rappresentate dalle aree dei rettangoli e, ovviamente, la distanza totale percorsa è rappresentata dalla somma di tali aree.

Si supponga ora di dimezzare gli intervalli di tempo. Ora, nei primi cinque secondi, l'auto acquista successivamente ogni mezzo secondo una variazione istantanea di velocità . Quanto valgono le 10 velocità al termine di ogni intervallo? (Esercizio).

Dimezzando ancora una volta gli intervalli di tempo le variazioni di velocità saranno quattro volte più frequenti rispetto al caso iniziale; infine, dopo n dimezzamenti, ogni intervallo di tempo sarà pari a $\frac{1}{2^n}$ secondi e le variazioni di velocità saranno 2^n. Quindi, per n molto grande, questa interpretazione del moto differisce in modo impercettibile dal moto reale dell'auto in cui la velocità varia in modo continuo rispetto al tempo: quella che sembrava una interpretazione grossolana è diventata una descrizione molto vicina alla realtà delle cose.

Che cosa succede nel caso della caduta libera di un corpo pesante?

Ovviamente, le considerazioni appena fatte si applicano perfettamente al caso della caduta libera.

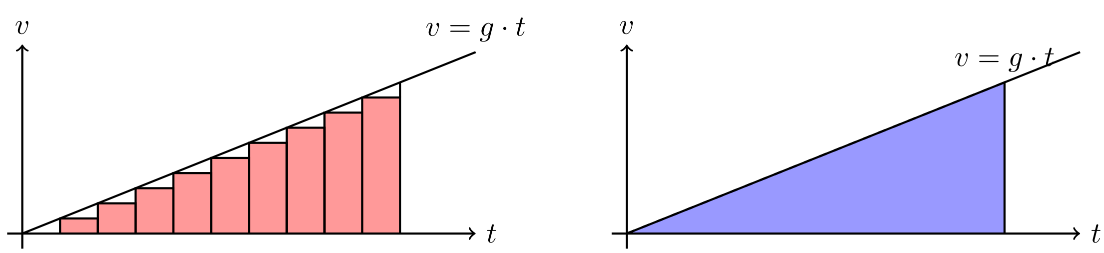

Figura 4: Se il numero n degli intervallini di tempo è molto grande, la somma delle aree dei rettangoli rossi si discosta molto poco dall'area del triangolo blù. La distanza percorsa dal corpo in caduta libera è $s = \frac{1}{2}g\,t^2$.

Che cosa succede quando, (si veda la figura: 4), il numero n degli intervallini di tempo diventa molto grande? I rettangoli diventano molto numerosi e la somma delle loro aree approssima, con alto grado di precisione, la distanza percorsa dal corpo in caduta. Risulta anche evidente che, per n molto grande, la somma delle aree di tali rettangoli si discosta molto poco dall'area delimitata dalla curva $v = g\,t$ e l'asse t del tempo (triangolo blù) . Quindi l'area delimitata dalla retta $v = g\,t$ e dall'asse del tempo t (cioè , l'area del triangolo blù) fornisce la distanza percorsa dal corpo in caduta libera, all'istante t. La base di questo triangolo è t, l'altezza è $g\,t$; quindi la sua area vale $s = \frac{1}{2}t \cdot g\,t$, cioè

$$s = \frac{1}{2}g\,t^2 \tag{1.4}$$

Questa è il modo in cui Galileo dedusse $s = s(t)$ dall'equazione $v = g\,t$. Questa è la legge che lega la distanza in funzione del tempo quando la velocità è proporzionale al tempo. La distanza percorsa da un corpo in caduta libera non è, come Galileo aveva supposto in un primo tempo, proporzionale al tempo ma al quadrato del tempo. Egli confutò la sua prima convinzione e dedusse correttamente la seconda con un ragionamento che, per certi versi, fornì le basi del futuro calcolo infinitesimale.

Il suo problema era ora quello di verificare sperimentalmente la legge $s = \frac{1}{2} g\, t^2$ con l'obiettivo di verificare indirettamente la validità della sua deduzione. Le principali difficoltà che incontrò a questo punto erano di carattere pratico: egli non poteva "congelare"il moto di un corpo in caduta libera per stabilire la sua velocità istantanea; a quel tempo, non avendo a disposizione sofisticati strumenti di misura, era relativamente facile misurare le distanze, ma molto più difficile misurare le velocità .

Come fece allora? Si consideri la seguente tabella:

Tempo t (in secondi)	Distanza totale di caduta in t secondi	Distanza di caduta in secondi successivi
0	0	
1	$\frac{1}{2}g \cdot 1$	$\frac{1}{2}g \cdot 1$
2	$\frac{1}{2}g \cdot 4$	$\frac{1}{2}g \cdot 3$
3	$\frac{1}{2}g \cdot 9$	$\frac{1}{2}g \cdot 5$
4	$\frac{1}{2}g \cdot 16$	$\frac{1}{2}g \cdot 7$
5	$\frac{1}{2}g \cdot 25$	$\frac{1}{2}g \cdot 9$

Le distanze di caduta in intervalli successivi di tempo uguali stanno nei rapporti $1 : 3 : 5 : 7 : 9$ eccetera.

Ad esempio, si consideri un corpo che cade dalla cima di un muro sul quale sono state riportate con il gesso tacche a distanze uguali. Se il corpo raggiunge la prima tacca dopo un secondo, dovrebbe raggiungere la tacca n. 3 allo scadere di 2 secondi e la tacca n. 5 allo scadere di 3 secondi e così via. Ma i corpi cadono così velocemente che queste osservazioni erano difficili all'epoca; malgrado quel che narra la leggenda, Galileo non fece cadere una palla di cannone dalla sommità della Torre di Pisa. Egli si pose allora il problema di rallentare il moto per facilitare l'osservazione e per poter realizzare misurazioni sufficientemente precise. Una riduzione del valore (costante) di $\frac{1}{2}g$ non avrebbe dovuto alterare i rapporti. Galileo intuì che un *muro verticale è un caso limite di un piano inclinato*: non dovremmo aspettarci gli stessi rapporti in entrambi i casi? A differenza del caso di un piano verticale, un corpo che si trova lungo un piano inclinato "perde" parte del suo peso e, più è piccolo l'angolo di inclinazione, più sarà lento il suo moto. Galileo seguì questa strada. Egli verificò che una palla che parte dal punto O, si muove da O a A in una unità di tempo, si muove da B a C, e da C a D sempre in una unità di tempo. Verificò inoltre che il fenomeno non dipendeva dall'angolo di inclinazione del piano. In questo il modo Galileo ottenne la verifica sperimentale delle sue deduzioni.

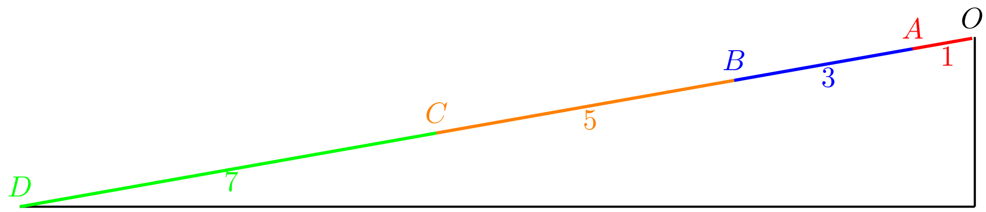

Figura 5: Un corpo cade lungo un piano inclinato mantenendo inalterati i rapporti 1 : 3 : 5 : 7 : 9 eccetera.

1.2 Il piano inclinato

Quando l'angolo di inclinazione α di un piano inclinato è ridotta a zero, il piano è orrizzontale e il corpo non si muove; il piano si oppone all'intero peso. Più grande è l'angolo α, più veloce il corpo scende giù e più piccola è la frazione del suo peso bilanciata dal piano. Infine, per $\alpha = 90$, il piano non si oppone al peso e si ha la caduta libera. Ovviamente la frazione di peso bilanciata dal piano dipende dall'angolo α e dalle condizioni di equilibrio di un corpo su un piano inclinato. Il metodo utilizzato da Galileo consiste in sostanza nell'uso implicito della regola del parallelogramma per le forze.

Che cosa causa l'accelerazione di un corpo? Ovviamente la forza che agisce su di esso. Tutti noi sappiamo che per aumentare la velocità della nostra auto dobbiamo "dare gas ", come si dice. L'auto deve avere a disposizione più forza. E qual è la forza che permette a un corpo in caduta libera di aumentare progressivamente la sua velocità ? L'attrazione gravitazionale della terra, cioè il peso del corpo. Noi ora sappiamo che Galileo non poteva sapere che l'accelerazione di un corpo in caduta libera sulla luna è circa un sesto di quella sulla superficie terrestre. Sebbene il corpo sia lo stesso, spostandolo dalla luna alla terra il suo peso aumenta di circa sei volte! Sulla luna pesa meno perchè si trova in un campo gravitazionale più debole.

Quindi, nel nostro caso, il punto fondamentale della questione è questo: *l'accelerazione di un corpo in caduta libera è proporzionale alla forza che agisce su di esso, il suo peso.*

Ora, che cosa rappresenta la lettera g nell'equazione $v = gt$? Si è già detto che g fornisce la misura della pendenza della retta di figura: 3. Più precisamente, g è il rapporto $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ tra la variazione di velocità e il corrispondente intervallo di tempo; g è quindi l'accelerazione (costante) a cui è soggetto il corpo.

Riassumendo, la g dell'equazione $v = g\,t$ è la costante gravitazionale, la misura del campo gravitazionale terrestre. La forza esercitata su un corpo dalla Terra, dalla Luna o da qualsiasi altro campo gravitazionale, è proporzionale alla costante g che contraddistingue quel campo.

Moto senza attriti lungo un piano inclinato. Diagramma delle forze.

Si consideri un corpo di massa unitaria ($m = 1$) che si muove senza attriti lungo un piano inclinato. Esso è soggetto alla forza $\overrightarrow{g}$ diretta verticalmente verso il basso (vettore nero) e alla reazione vincolare $\overrightarrow{R}$ del piano che risulta perpendicolare alla sua superficie (vettore rosso).

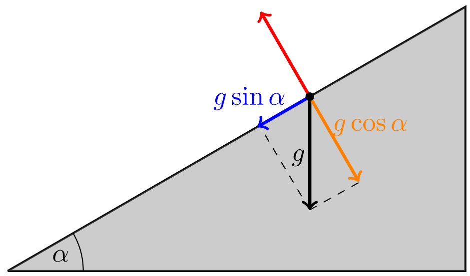

Figura 6: Un corpo che cade lungo un piano inclinato: il vettore g è scomposto nella sua componente lungo il piano e nella componente ad esso perpendicolare.

Si scomponga $\overrightarrow{g}$ nei seguenti due vettori componenti:

- $\overrightarrow{g} \sin \alpha$, diretto lungo il piano, con verso che punta verso il basso;

- $\overrightarrow{g} \cos \alpha$, perpendicolare al piano, con modulo uguale a quello del vettore R e verso opposto (perché non c'è alcun moto perpendicolare al piano inclinato);

Pertanto, il problema del moto senza attriti lungo un piano inclinato diventa quello di un corpo "in caduta libera" in un campo gravitazionale pari a $g \sin \alpha$ (invece che g) che avviene lungo la direzione OA (invece che verticalmente).

2 Esercizi sul moto uniforme e sul moto uniformemente accelerato.

Gli esercizi contrassegnati con (*) sono più difficili.

Esercizio 2.1. *Un auto, che deve percorrere complessivamente* $460\,Km$*, durante la prima ora di viaggio si muove alla velocità costante di* 60 km/h*. Poi, istantaneamente, aumenta la sua velocità e prosegue il moto con velocità uniforme arrivando a destinazione dopo altre tre ore.*

1. *Qual è la velocità media dell'auto durante l'intero tragitto (esprimere il risultato in* m/s*)?*

2. *Qual è la velocità istantanea dell'auto dopo la prima ora (esprimere il risultato in* m/s*)?*

3. *Tracciare il grafico della velocità rispetto al tempo.*

Esercizio 2.2. *Un auto, che deve percorrere complessivamente* $480\,Km$*, durante la prima ora di viaggio si muove alla velocità costante di* 60 km/h*. Poi, istantaneamente, aumenta la sua velocità e prosegue il moto con velocità uniforme* v*. Se si desidera percorrere l'intero* *tragitto con una velocità media doppia rispetto a quella della prima ora, quanto deve valere v?*

Esercizio 2.3. (*) *Un treno viaggia a velocità costante pari a* $100\ km/h$ *e impiega quattro ore per spostarsi da una città* A *a una città* B*. Giunto in* B *inverte immediatamente il verso e torna in* A *sempre con velocità costante. Quale deve essere la velocità di ritorno affinchè la velocità media sul tragitto* ABA *sia di* $200\ km/h$*?*

- $\boxed{A}$ $300\ km/h$.
- $\boxed{B}$ $400\ km/h$.
- $\boxed{C}$ *infinita.*
- $\boxed{D}$ $500\ km/h$.
- $\boxed{E}$ $50\ km/h$.

Esercizio 2.4. *La luce si propaga con velocità* $c = 300.000\,\mathrm{km/s}$ *mentre il suono con velocità* $v = 340\,\mathrm{m/s}$*. Un alpinista vede cadere, durante un temporale, un fulmine a* $2,00\,\mathrm{km}$ *di distanza. Dopo quanto tempo dal lampo sente il tuono?*

Esercizio 2.5. *Un cane inizia a correre avanti e indietro tra i suoi padroni che si stanno avvicinando l'uno all'altro, entrambi alla velocità di* $1,1\,\mathrm{m/s}$*. Quando i padroni si trovano uno di fronte all'altro, il cane ha percorso* $15\,\mathrm{m}$ *alla velocità media di* $3,0\,\mathrm{m/s}$*. A quale distanza si trovavano i due padroni quando il cane ha iniziato a correre?*

Esercizio 2.6. *In una gara a cronometro due ciclisti partono distanziati di* $120\,\mathrm{s}$ *l'uno dall'altro ma arrivano sul traguardo insieme. Sapendo che la distanza percorsa è* $50\,\mathrm{Km}$ *e che la velocità media del ciclista più veloce è di* $40\,\mathrm{Km/h}$ *si determini*

1. *il tempo impiegato dal ciclista più veloce per concludere la gara;*
2. *la velocità media del ciclista più lento.*

Esercizio 2.7. *Una moto e un auto percorrono nella stessa direzione un'autostrada a velocità costante. La velocità della moto è di* $90\,\mathrm{Km/h}$ *mentre quella dell'auto è di* $120\,\mathrm{Km/h}$*. La moto passa davanti a una stazione di servizio* $2,0$ *minuti prima dell'auto.*

1. *Scrivere le leggi orarie della moto e dell'auto.*
2. *Dopo quanto tempo si incontrano?*
3. *A quale distanza dalla stazione di servizio avviene l'incontro?*

Esercizio 2.8. *Un maratoneta passa davanti a un punto di ristoro alla velocità di* $6\,\mathrm{m/s}$ *mentre un suo avversario che procede a* $4\,\mathrm{m/s}$ *si trova più avanti di* $20\,\mathrm{m}$*. Sapendo che entrambi si muovono con velocità costante, verificare che il primo maratoneta supera il secondo dopo* $10\,\mathrm{s}$*.*

Esercizio 2.9. *Un'auto inizialmente ferma, dopo* 8 *minuti ha una velocità di* $86,4\,\mathrm{Km/h}$. *Nei due minuti successivi decelera fino a* $72\,\mathrm{Km/h}$. *Determinare*

1. *l'accelerazione media dell'auto nei primi* 8 *minuti;*
2. *l'accelerazione media nei due minuti successivi;*
3. *l'accelerazione media nei* 10 *minuti.*

Esercizio 2.10. *Un'atleta parte da fermo e nei primi* $5,0\,\mathrm{s}$ *si muove con accelerazione costante pari a* $2,2\,\mathrm{m/s^2}$*; nei successivi* $5,0$ *secondi procede a velocità costante e arriva al traguardo.*

1. *Tracciare il grafico velocità - tempo del moto dell'atleta.*
2. *Determinare la velocità con cui l'atleta arriva al traguardo.*
3. *Determinare lo spazio percorso dall'atleta.*

Esercizio 2.11. *Un camion sta viaggiando alla velocità di* $126\,\mathrm{Km/h}$. *L'autista vede un cartello con la scritta "PASSAGGIO A LIVELLO A* 200 *METRI". L'autista frena e diminuisce la sua velocità in modo uniforme di* $3,5\,\mathrm{m/s}$ *in ogni secondo.*

1. *Determinare una legge oraria che descriva il moto del camion.*
2. *Il camion riesce a fermarsi in* 10 *secondi?*

Esercizio 2.12. *Un carrello si sta muovendo alla velocità di* $5,0\,\mathrm{m/s}$ *quando inizia a salire su un piano inclinato. La velocità del carrello decresce uniformemente e dopo* $4,0$ *secondi il carrello si ferma.*

1. *Qual è la decelerazione del carrello durante il suo moto lungo il piano inclinato?*
2. *Quanto spazio percorre lungo il piano inclinato prima di fermarsi?*
3. *Se l'angolo di inclinazione del piano è* 30°*, a quale altezza arriva il carrello?*

Esercizio 2.13. *Un corpo cade verticalmente da un'altezza di* $80\,m$ *con velocità iniziale* $\boldsymbol{v}_0$ *orientata verso il basso e intensità* $v_0 = 10\,m/s$. *Determinare il tempo di caduta del corpo e la velocità nell'istante in cui tocca il suolo.*

Esercizio 2.14. *Un corpo, partendo da fermo, cade verticalmente da un'altezza* h. *Se il moto di caduta avviene in assenza di attriti, qual è la sua velocità quando raggiunge il suolo?*

Esercizio 2.15. *Un corpo si trova a un'altezza di* $80\,m$ *dal suolo e viene lanciato verso l'alto con velocità* $v_0 = 10\,m/s$. *Dopo quanto tempo il corpo tocca il terreno? con quale velocità?*

Esercizio 2.16. (*) *Una palla viene lanciata verticalmente verso l'alto con velocità v_0. Determinare:*

(a) *il tempo impiegato dalla palla per raggiungere la massima altezza;*

(b) *la massima altezza raggiunta dalla palla;*

(c) *il tempo complessivo impiegato dalla palla per tornare a terra;*

(d) *la velocità della palla nell'istante in cui raggiunge il suolo.*

Esercizio 2.17. *Un' auto procede con velocità costante pari a $120\,km/h$ quando il guidatore vede un ostacolo a $150\,m$. Dopo $0,2\,s$ inizia a frenare e dopo altri $10\,s$ si ferma. Supponendo che la decelerazione durante la frenata sia costante si determini*

(a) dopo quanti metri l'auto si ferma;

(b) la velocità dell'auto dopo che ha iniziato a frenare da $5\,s$;

(c) lo spazio percorso dall'auto durante i primi $7\,s$ di frenata.

Esercizio 2.18. *Una sfera si trova su un piano inclinato, il cui angolo di inclinazione rispetto al piano orizzontale è $\alpha = 20^o$. La palla rotola senza attriti e possiede una velocità iniziale di $5\,m/s$. Sapendo che inizialmente la sfera si trova a un'altezza $h = 90\,m$ si calcoli*

(a) dopo quanto tempo e con quale velocità la sfera arriva al suolo;

(b) la velocità della sfera dopo $3\,s$ dalla partenza.

Esercizio 2.19. *Una sfera rotola senza attrito su un piano inclinato avente altezza h e lunghezza l. Trovare la velocità della sfera quando tocca il piano orizzontale.*

Esercizio 2.20. *Due sfere vengono fatte cadere con velocità iniziale nulla da un'altezza h, la prima in caduta libera, la seconda lungo un piano inclinato.*

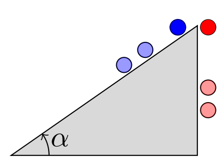

Figura 7: La sfera blu si muove lungo il piano inclinato, quella rossa cade verticalmente.

Se si trascura ogni forma di attrito la velocità con cui i corpi arrivano al suolo è :

$\boxed{A}$ *uguale per le due sfere.*

$\boxed{B}$ *il corpo in caduta libera possiede velocità maggiore.*

$\boxed{C}$ *la sfera che scende lungo il piano inclinato possiede velocità maggiore.*

$\boxed{D}$ *non è possibile rispondere se non si conoscono le masse delle due sfere.*

$\boxed{E}$ *non è possibile rispondere se non si conosce l'angolo d'inclinazione del piano inclinato.*

Esercizio 2.21 (Semaforo rosso). (*) *Un auto si muove con velocità constante quando un semaforo diventa rosso. Dopo un breve tempo di reazione, il guidatore pigia il pedale del freno e l'auto rallenta con decelerazione costante fino a fermarsi. L'auto impiega* $56.7\ m$ *a fermarsi quando la sua velocità è di* $80.5\ km/h$ *e* $24.4\ m$ *quando la sua velocità è di* $48.3\ km/h$ *(si suppone che il tempo di reazione e la decelerazione siano gli stessi per entrambi i casi).*

1. *Determinare il tempo di reazione del guidatore la decelerazione nei due casi proposti.*
2. *Analizzare e discutere le equazioni che sono state utilizzate per risolvere il problema.*
3. *Analizzare e discutere le soluzioni numeriche trovate.*

2.1 Soluzioni e risposte.

Esercizio 2.1

1. $v_m = 115\,\mathrm{Km/h} = 31,94\,\mathrm{m/s}$.
2. $v_1 = 60\,\mathrm{Km/h} = 16,67\,\mathrm{m/s}$.

Esercizio 2.2 Durante la prima ora di viaggio l'auto percorre $60\,km$. Se Δt è il tempo necessario per percorrere il restante tragitto, la velocità media complessiva dell'auto è

$$v_m = \frac{480}{1+\Delta t}$$

Poiché v_m deve essere pari a $120\,km/h$ si ottiene:

$$120 = \frac{480}{1+\Delta t}$$

Con rapidi calcoli si ottiene $\Delta t = 3\,h$.

Pertanto la velocità v dopo la prima ora di viaggio deve essere

$$v = \frac{420}{3}\,\mathrm{Km/h} = 160\,\mathrm{Km/h}$$

Esercizio 2.3 La risposta corretta è C.

Esercizio 2.4 L'alpinista sente il suono $5,88\,\mathrm{s}$ dopo aver visto il lampo.

Esercizio 2.5 I padroni si trovavano a $11\,\mathrm{m}$ di distanza.

Esercizio 2.6

1. Il tempo impiegato dal ciclista più veloce per terminare la gara è $4,5\cdot 10^3\,\mathrm{s}$
2. Velocità media del ciclista più lento: $v = 11\,\mathrm{m/s}$

Esercizio 2.7

2. Auto e moto si incontrano dopo 360 secondi.

3. L'incontro avviene a $12\,\mathrm{Km}$ dalla stazione di servizio.

Esercizio 2.8 Occorrre fissare un sistema di riferimento; si scelga, per esempio, la retta s coincidente con le traiettorie (uguali) descritte dai maratoneti (l'orientamento di s concorde con il verso dei due moti) e l'origine coincidente con il punto di ristoro. Se all'istante $t_0 = 0$ il primo maratoneta si trova nell'origine ($s_1(0) = 0$) le due leggi orarie sono:

$$s_1(t) = 6t \qquad s_2(t) = 20 + 4t$$

Quando il primo maratoneta raggiunge il secondo gli spazi percorsi devono essere uguali. Pertanto ...

Esercizio 2.9

1. $+0,05\,\mathrm{m/s^2}$
2. $-0,033\,\mathrm{m/s^2}$
3. $+0,033\,\mathrm{m/s^2}$

Esercizio 2.10

2. L'atleta arriva al traguardo alla velocità di $11\,\mathrm{m/s}$.

3. Lo spazio percorso è $83\,\mathrm{m}$.

Esercizio 2.11

1. Si fissi il sistema di riferimento in modo tale che la retta s coincida con la traiettoria descritta dal camion (s è orientata come il moto del camion). Se all'istante $t_0 = 0$ il camion si trova in $s(0) = 0$ la legge oraria è

$$s(t) = 35t - \frac{1}{2}3,5\,t^2$$

2. Sì, il camion si ferma dopo $175\,\mathrm{m}$.

Esercizio 2.12

1. $a = -1,3\mathrm{m/s}$.
2. $10\,\mathrm{m}$.
3. $5\,\mathrm{m}$.

Esercizio 2.14 La velocità della palla, quando raggiunge il suolo è $v = \sqrt{2gh}$.

Esercizio 2.16

Sistema di riferimento. Il moto della palla avviene lungo una retta ortogonale al piano di terra. Conviene scegliere come sistema di riferimento una retta s diretta ortogonalmente rispetto al piano di terra, con verso che punta verso l'alto e origine coincidente con il punto in cui s interseca il piano di terra.

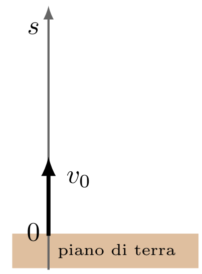

Figura 8

(a) Rispetto al sistema di riferimento prescelto la legge della velocità è

$$v(t) = v_0 - gt \tag{2.1}$$

Quando la palla raggiunge il punto più alto la sua velocità è nulla. Ponendo $v(t) = 0$ in (2.1) si ottiene:

$$v_0 - gt = 0$$

Quindi il tempo impiegato dalla palla per raggiungere il punto più alto è

$$t = \frac{v_0}{g}$$

(b) La legge oraria del moto è

$$s(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{2.2}$$

L'altezza massima raggiunta dalla palla si ottiene ponendo $t = \dfrac{v_0}{g}$ in (2.2)

$$\texttt{altezza massima} \quad = \quad s\left(\frac{v_0}{g}\right) \quad = \quad v_0\frac{v_0}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 \quad = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}$$

(c) Rispetto al sistema di riferimento prescelto, la palla tocca terra quando si trova a quota zero. Allora, ponendo $s(t) = 0$ nella legge oraria (2.2) si ottiene:

$$v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$

risolvendo questa equazione rispetto a t si ricava $t = 0$ e $t = 2\dfrac{v_0}{g}$. Quindi il tempo complessivo in cui la palla sta in aria è

$$\texttt{tempo di caduta} = 2\frac{v_0}{g}$$

Il tempo complessivo di caduta è il doppio rispetto al tempo di ascesa. Il tempo impiegato dalla palla per raggiungere la massima altezza è lo stesso che impiega per tornare a terra.

(d) La velocità nell'istante in cui la palla tocca terra si ottiene sostituendo $t = 2\dfrac{v_0}{g}$ nella legge della velocità (2.1). Si ottiene:

$$\texttt{velocità a terra} \; = v\Big(2\frac{v_0}{g}\Big) = v_0 - g\, 2\frac{v_0}{g} = -v_0$$

La velocità finale coincide con quella iniziale. Il segno meno sta a indicare che la palla, all'istante in cui arriva a terra, si muove con verso opposto rispetto a quello posseduto all'inizio del moto.

Esercizio 2.19

Sistema di riferimento. Si tratta di un moto in un'unica direzione; la scelta più naturale del sistema di riferimento consiste nel fissare una retta orientata s nel modo seguente:

- *direzione della retta*: coincidente con quella del piano inclinato;

- *orientamento della retta*: la freccia punta verso il basso (in questo modo l'accelerazione avrà segno positivo);

- *origine*: coincidente con la posizione della sfera all'istante $t = 0$.

Rispetto al sistema di riferimento prescelto la legge oraria del moto è

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2$$

l'accelerazione a coincide con $g_{\shortparallel}$, componente di g (accelerazione di gravità) nella direzione del piano inclinato. Si ha

$$g_{\shortparallel} = g \sin\alpha = g\frac{h}{l}$$

Pertanto la legge oraria del moto lungo il piano inclinato diventa

$$s(t) = \frac{1}{2}\,\frac{h}{l}\,g\,t^2 \tag{2.3}$$

La sfera scende lungo il piano inclinato senza attriti e dopo aver percorso un tratto di lunghezza l tocca il piano di terra. Il problema chiede di determinare la velocità della sfera proprio in questo istante. Come prima cosa si può determinare il "tempo di discesa" sostituendo $s(t) = l$ nella legge oraria (2.3). Si ottiene:

$$l = \frac{1}{2}\,\frac{h}{l}\,g\,t^2$$

Bisogna allora ricavare il tempo t dalla precedente equazione. Ecco i conti:

$$2l^2 = h\,g\,t^2$$

$$t^2 = \frac{2l^2}{hg}$$

$$t = \frac{l\sqrt{2}}{\sqrt{hg}}$$

Infine, razionalizzando il denominatore si ottiene:

$$t = \frac{l\sqrt{2}}{\sqrt{hg}}\,\frac{\sqrt{hg}}{\sqrt{hg}}$$

cioè

$$t = \frac{l\sqrt{2hg}}{hg}$$

quello appena calcolato è il tempo in cui la sfera percorre un tratto di lunghezza l lungo il piano inclinato e arriva a terra. Ora è facile calcolare la velocità posseduta dalla sfera in questo istante. La legge della velocità relativa al moto rettilineo uniformemente accelerato è

$$v = v_0 + at$$

Nel nostro caso $v_0 = 0$ e $a = g_{\shortparallel} = g\dfrac{h}{l}$, quindi

$$v = g\,\frac{h}{l}\,t$$

Sostituendo $t = \dfrac{l\sqrt{2hg}}{hg}$ nell'ultima uguaglianza si ricava:

$$v = \frac{g\,h}{l}\,\frac{l\sqrt{2hg}}{hg}$$

$$v = \sqrt{2hg}$$

Il risultato trovato ci dice che la velocità della sfera nell'istante in cui raggiunge il piano orizzontale NON dipende dalla lunghezza del piano inclinato nè dall'angolo di inclinazione del piano. L'unica grandezza che influisce sulla velocità finale della sfera è l'altezza h da cui si lascia cadere la sfera!

Esercizio 2.20 La risposta corretta è A. Come si è dimostrato negli esercizi 2.14 e 2.19, la velocità con cui le sfere arrivano al suolo è in entrambi i casi $v = \sqrt{2gh}$.

Esercizio 2.21 *Di che tipo di moto si tratta?* Durante la "fase di reazione" del guidatore l'auto si muove di moto uniforme (velocità costante), mentre durante la "fase di decelerazione" il moto dell'auto è uniformemente decelerato. Le equazioni che regolano questi due tipi di moti sono:

Relazione	**velocità uniforme (v_0)**	**decelerazione uniforme (a)**
v funzione di t	$v = v_0$	$v = v_0 - at$
x funzione di t	$x = x_0 + v_0 t$	$x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2}at^2$
v funzione di x	$v = v_0$	$v^2 = v_0^2 - 2a(x - x_0)$

Come impostare il problema? La tabella seguente chiarisce la situazione e allo stesso tempo definisce le variabili che verranno usate:

	fase di reazione	fase di decelerazione
tempo richiesto:	t_r	t_d
distanza percorsa:	x_r	x_d

Noi conosciamo $(x_r + x_d)$ e v_0 e vogliamo conoscere t_r e a. È evidente che nessuna delle sei equazioni scritte sopra ci permette di risolvere immediatamente il problema.

Una strategia di soluzione. Poichè non conosciamo e non sappiamo come ricavare t_d non è utile utilizzare la relazione tra x e t per la fase di decelerazione. Proviamo allora a utilizzare la relazione tra v e x per questa fase, precisamente:

$$v^2 = v_0^2 - 2a(x - x_0)$$

che nella nostra situazione diventa:

$$v_0^2 - 2ax_d = 0$$

$$x_d = \frac{v_0^2}{2a}$$

Combinando quest'ultima uguaglianza con $x_r = v_0 t_r$ relativa alla fase di reazione otteniamo:

$$x_r + x_d = v_0 t_r + \frac{v_0^2}{2a}$$

Questo è quello di cui avevamo bisogno: coinvolge le due quantità che si stanno cercando (t_r e a) e due quantità a noi note ($(x_r + x_d)$ e v_0,). Inserendo i dati del problema per i due casi otteniamo due equazioni, che risolte simultaneamente permettono di ricavare le quantità cercate.

Analisi dell'equazione. Prima di sostituire i numeri nell'equazione e iniziare la risoluzione del nostro sistema di due equazioni in due incognite verifichiamo la ragionevolezza dell'equazione trovata. Dal punto di vista dimensionale è corretta. Il risultato sarà positivo. Se il tempo di reazione t_r aumenta allora il tempo di arresto dell'auto $(x_r + x_d)$ aumenta.. Se la velocità iniziale v_0 aumenta la distanza di arresto aumenta. Se la decelerazione a aumenta allora la distanza di arresto diminuisce. Tutto ciò ha senso. Infine, che cosa succede se $a = 0$? La distanza di arresto diventa infinita. Anche quest'ultima considerazione ha senso, se non c'è decelerazione la macchina prosegue nel suo moto a velocità costante senza mai fermarsi. Superato anche quest'ultimo controllo di ragionevolezza possiamo eseguire i conti.

Ricerca numerica delle soluzioni.

I dati del nostro problema sono i seguenti

$$
\begin{array}{rccc}
 & x_r + x_d & v_0 & \\
 & & & \\
\text{primo caso:} & 56.7\,m & 80.5\,km/h & = 22.4\,m/s \\
\text{secondo caso:} & x_r & 48.3\,km/h & = 13.4\,m/s
\end{array}
$$

Usando l'equazione

$$x_r + x_d = v_0 t_r + \frac{v_0^2}{2a}$$

nei due casi otteniamo:

$$\begin{cases} 56.7 & = & 22.4\,t_r + \dfrac{(22.4)^2}{2a} \\ \\ 24.4 & = & 13.4\,t_r + \dfrac{(13.4)^2}{2a} \end{cases}$$

Per risolvere il sistema cerchiamo di eliminare la decelerazione a da entrambe le equazioni. Per fare questo dividiamo la prima equazione per $(22.4)^2$ e la seconda per $(13.4)^2$. Otteniamo

$$\begin{cases} 0.113 & = & 0.0446\,t_r + \dfrac{1}{2a} \\ \\ 24.4 & = & 0.0746\,t_r + \dfrac{1}{2a} \end{cases}$$

Sottraendo termine a termine ricaviamo:

$$\begin{cases} 0.023 & = & 0.0300\,t_r \\ \\ 24.4 & = & 0.0746\,t_r + \dfrac{1}{2a} \end{cases}$$

Dalla prima equazione ricaviamo il tempo di reazione del guidatore che è

$$t_r = 0.767\,s$$

e sostituendo il valore trovato per t_r nella seconda equazione del sistema otteniamo il valore della decelerazione

$$a = 6.34\,m/s^2$$

Entrambi i risultati sembrano ragionevoli: il tempo di reazione è inferiore al secondo e la decelerazione è meno dei due terzi dell'acelerazione di gravità $g = 9.8\,m/s^2$.

Grafici. Sebbene il problema non lo richieda può essere interessante tracciare i grafici della velocità v rispetto al tempo e della velocità rispetto allo spazio percorso x. (Esercizio.)