Gravitazione universale.

Mauro Saita

e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Versione provvisoria, marzo 2014.

Indice

1 Il sistema solare e il modello eliocentrico **2**

1.1 Aristarco di Samo (310 a.C. - 230 a.C.). Copernico (1473 - 1543). 2

1.2 Leggi di Keplero 2

2 Legge di gravitazione universale. Newton (1642-1727) **4**

2.1 Un primo passo: la mela, la luna e ... la palla di cannone 4

2.2 La Luna 'cade' sulla Terra. Con quale accelerazione? 6

2.3 Legge di gravitazione universale. 7

2.4 La massa del sole e quella della Terra 7

Per approfondimenti sull'argomento "Gravitazione" si consigliano i seguenti testi:

Richard Feynman, *Sei pezzi facili*, Adelphi, 2000 (undicesima edizione, settembre 2009).

George Gamow, *Gravità . Le forze che governano l'universo.* Edizioni Dedalo 2010.

[0]Nome file: 'gravitazione-universale-2014.tex'

1 Il sistema solare e il modello eliocentrico

1.1 Aristarco di Samo (310 a.C. - 230 a.C.). Copernico (1473 - 1543).

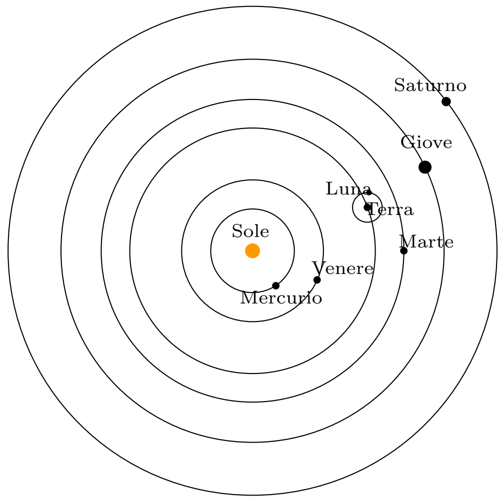

Figura 1: Il sistema eliocentrico di Aristarco e di Copernico.

I sette "pianeti classici" sono: Mercurio, Venere (i più vicini al sole), Terra, Luna e infine Marte, Giove e Saturno (i più lontani dal sole). I "pianeti nuovi" sono tre: Urano Plutone e Nettuno. Urano, fu prima classificato fra le stelle fisse e nel 1781 fu identificato come pianeta da William Herschel. La sua orbita fu calcolata da Bouvard nel 1821; nel 1845 si notò che l'orbita effettiva del pianeta si discostava fortemente da quanto era stato previsto con calcoli teorici; Adams e Le Verrier attribuirono questo scostamento agli effetti perturbativi dovuti alla presenza di un altro pianeta. La sera del 23 settembre 1846, presso l'Osservatorio astronomico di Berlino, gli astronomi Johann Gottfried Galle e il suo assistente Heinrich Louis d'Arrest osservarono per la prima volta il pianeta Nettuno. Esso fu il primo pianeta ad essere individuato mediante analisi teoriche e non attraverso regolari osservazioni. Plutone invece fu osservato, in modo casuale, il 18 febbraio 1930.

1.2 Leggi di Keplero

Keplero, basandosi sulle osservazioni astronomiche di Tycho Brahe formulò tre leggi di natura puramente cinematica sui moti planetari.

Prima legge di Keplero. *Un pianeta orbita attorno al sole descrivendo un'orbita ellittica di cui il sole occupa uno dei due fuochi.*

Le orbite planetarie non sono circolari, come sosteneva Copernico, bensì ellittiche.

L'ellisse è il luogo dei punti per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi, detti fuochi. Tale somma è uguale all'asse maggiore dell'ellisse. Il rapporto tra la semidistanza dei due fuochi e il semiasse maggiore definisce l'eccentricità e dell'ellisse

$$e = \frac{c}{a}$$

dove c è la semidistanza focale e a è la lunghezza del semiasse maggiore. L'eccentricità dell'ellisse è un numero compreso tra zero e uno: $0 \leq e < 1$. Nel sistema solare i pianeti che descrivono orbite molto 'schiacciate' sono Plutone (il più lontano dal Sole, $e = 0,248$) e Mercurio (il più vicino al Sole, $e = 0,206$). Per gli altri pianeti il valore dell'eccentricità è prossimo a zero; per esempio quello della

Terra è $e = 0,0167$; ciò permette di identificare, con buona approssimazione, la sua orbita con quella della circonferenza.

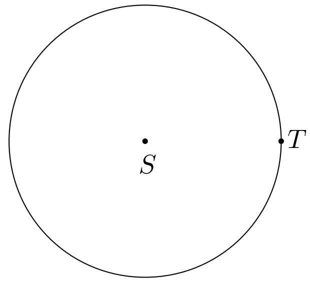

Figura 2: L'orbita terrestre è un'ellisse con la stessa eccentricità di quella riportata in figura.

Seconda legge di Keplero. *Un pianeta, nel suo moto di rivoluzione attorno al sole, spazza aree uguali in tempi uguali.*

La velocità con cui il pianeta orbita attorno al sole non è costante. Dalla prima legge di Keplero si deduce immediatamente che il pianeta, durante la sua orbita, viene a trovarsi a distanze diverse dal Sole: esso passa dal *perielio* (punto più vicino al sole) all'*afelio* (punto più lontano dal sole). Il raggio che idealmente congiunge il pianeta con il sole descrive in tempi uguali triangoli curvilinei di uguale superficie, ma con archi di base sull'orbita (e altezze) di diversa lunghezza. Ne segue che, il pianeta si muove più velocemente quando si trova in prossimità del perielio rispetto a quando si trova in prossimità dell'afelio. La velocità del pianeta è massima al perielio, minima all'afelio.

Un modo equivalente e più conciso per enunciare questa legge consiste nell'affermare che *i pianeti mantengono costante la velocità areolare* (`velocità areolare = area/tempo = costante`).

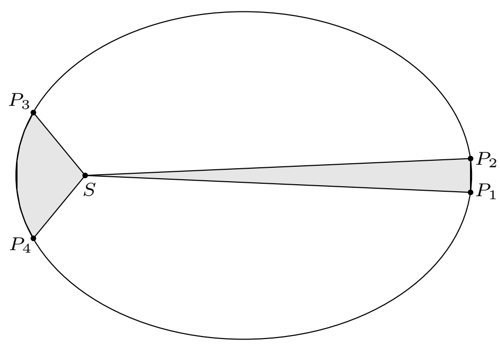

Figura 3: La velocità areolare di un pianeta è costante.

Terza legge di Keplero. *Se T indica il periodo di rivoluzione di un pianeta attorno al sole e r è la distanza media del pianeta dal sole. Allora il quadrato del tempo di rivoluzione è proporzionale al cubo della sua distanza media dal sole, cioè*

$$T^2 = hr^3$$

dove h è costante.

2 Legge di gravitazione universale. Newton (1642-1727)

2.1 Un primo passo: la mela, la luna e ... la palla di cannone

Si dice che Newton pensò per la prima volta alla legge di gravitazione universale osservando una mela che cadeva da un albero. Ovviamente è difficile stabilire se questo anedotto corrisponda al vero; quel che è certo è che Newton elaborò la sua teoria della gravitazione nel 1665 (aveva 23 anni) e in quell'anno si dovette trasferire in una fattoria del Lincolnshire per sfuggire alla Grande Peste che si era abbattuta su Londra e che causò la chiusura dell'Università di Cambridge. Non è difficile immaginare che in campagna abbia visto cadere molte mele ...

Newton scriveva: "... quello stesso anno cominciai a pensare agli effetti della gravità sulla Luna, paragonando la forza necessaria a mantenere la Luna sulla sua orbita con la forza di gravità presente sulla superficie terrestre".

Newton si convinse che la luna è , per certi versi, assimilabile a una grossa mela e di conseguenza si chiese quale doveva essere la relazione esistente tra il moto rettilineo uniformemente accelerato di un corpo che cade in prossimità della superficie terrestre e il moto orbitale della luna. La domanda che (forse) si pose è

Qual è il nesso tra il moto della mela e quello della luna?

Più precisamente, Luna e mela sono entrambe soggette alla forza di gravità terrestre. Perchè allora l'accelerazione di gravità **g**, scoperta e ben descritta da Galileo, dovrebbe far muovere la mela di moto rettilineo uniformemente accelerato e allo stesso tempo costringere la luna a descrivere un'orbita ellittica attorno alla Terra? In ultima analisi

Perchè la luna non cade sulla terra?

Per cercare di capire come Newton rispose a queste domande bisogna anzi tutto ricordare che egli, come tutti gli altri fisici del suo tempo, conosceva benissimo le leggi cinematiche del moto uniforme e quelle del moto uniformemente accelerato. Sapeva inoltre che un oggetto, lanciato in prossimità della superficie terrestre con velocità iniziale assegnata, descrive una traiettoria parabolica. Più scarse erano invece le sue conoscenze sulla luna: sapeva che era all'incirca sferica e presumibilmente piena, poco altro.

La grande intuizione di Newton fu capire che il nesso tra la mela e la Luna è da ricercarsi ... nella

palla di cannone!

Egli interpretò il moto di caduta di una mela dall'albero come quello di una piccola palla di cannone sparata con velocità orizzontale nulla; in altre parole pensò alla traiettoria descritta da un corpo in caduta libera come al caso limite di un moto parabolico.

E la luna? Si può pensare alla luna come a un'enorme palla di cannone? Sì, purchè si immagini che sia stata sparata con grandissima velocità orizzontale.

Per capire meglio la questione Newton immaginò il seguente "esperimento di pensiero": dalla cima di una montagna molto alta si immagini di sparare una palla di cannone con velocità iniziale elevatissima e direzione parallela al piano di terra. Il moto della palla di cannone consiste di due moti indipendenti: il primo è un moto rettilineo uniforme diretto come il piano di terra mentre il secondo è un moto rettilineo uniformemente accelerato, la cui accelerazione è **g**; la composizione dei due moti fa sì che la palla di cannone descriva una traiettoria parabolica. Se la terra fosse piatta la palla di cannone toccherebbe il suolo in un punto che risulterebbe tanto più lontano quanto più è elevata la velocità iniziale con cui viene sparata la palla. Ma la terra è approssimativamente una sfera: se la palla di cannone venisse sparata con velocità orizzontale molto grande essa vedrebbe la superficie terrestre incurvarsi sotto di sé. Raggiunta una certa velocità limite (e trascurando l'effetto della resistenza dell'aria) la palla di cannone descriverebbe un'orbita curvilinea mantenendosi ad altezza costante rispetto alla Terra, come se fosse una piccola luna ...

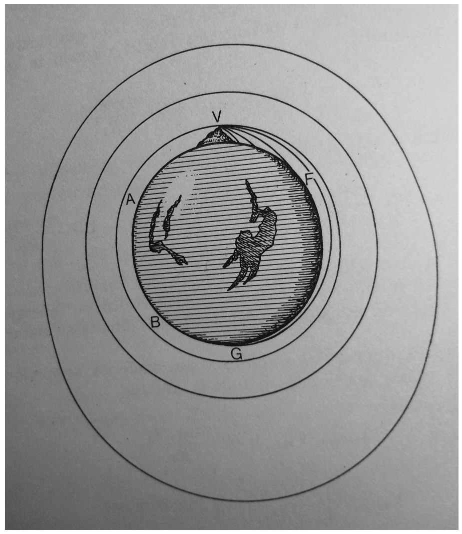

Figura 4: Il disegno originale di Newton.

2.2 La Luna 'cade' sulla Terra. Con quale accelerazione?

Quello che in termini euristici si è cercato di spiegare nella sezione precedente è che la *Luna, sotto l'azione della forza di gravità, cade in direzione della Terra, mancandola continuamente a causa della sua elevata velocità tangenziale.*

Qui si vuole determinare l'intensità dell'accelerazione della Luna nell'ipotesi che essa si muova di moto circolare uniforme attorno alla Terra e che sia soggetta all'azione della sola forza di gravità terrestre.

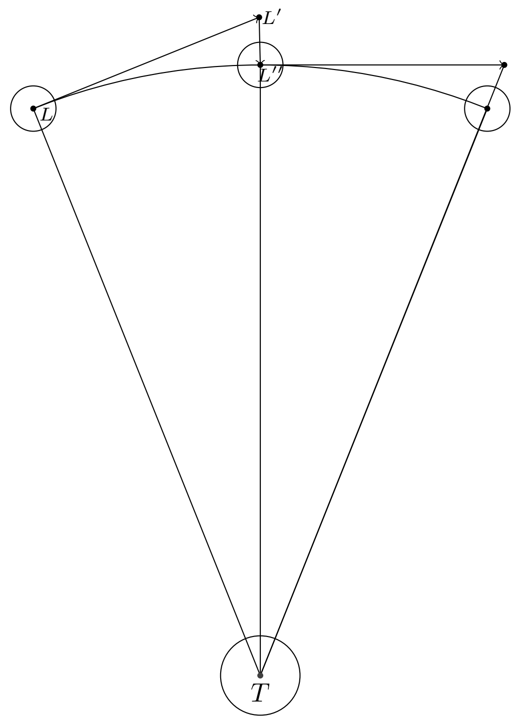

Figura 5: L'orbita della luna.

Nell'intervallino di tempo dt la Luna, inizialmente nella posizione L, si sposta di un tratto

$$LL' = v\,dt$$

lungo la tangente all'orbita e di un tratto

$$L'L'' = \frac{1}{2}a\,(dt)^2$$

dove a è l'accelerazione di gravità esercitata dalla Terra sulla Luna. Trascorso questo intervallino di tempo, la Luna raggiunge la posizione L''. Il triangolo TLL'' è retto in L, per il teorema di Pitagora si ha

$$(TL'' + L''L')^2 = TL^2 + (LL')^2$$

ovvero

$$2TL'' \cdot L''L' + L''L'^2 = LL'^2$$

Indicando con R la distanza Terra-Luna (raggio dell'orbita) si ottiene

$$2R \cdot L''L' + L''L'^2 = LL'^2$$

$$2R\left(\frac{1}{2}\,a\,dt^2\right)+\left(\frac{1}{2}\,a\,dt^2\right)^2=(v\,dt)^2$$

Nell'ultima uguaglianza dt è una quantità infinitesima; segue che dt^4 è una quantità molto più piccola rispetto a dt^2 e può essere trascurata

$$R\left(a\,dt^2\right)=(v\,dt)^2$$

ossia

$$a=\frac{v^2}{R}=4\pi^2\,\frac{R}{T^2}$$

Sapendo che il periodo della Luna è $T=27,3\,\mathrm{giorni}=2,35\cdot 10^6\,\mathrm{s}$ e che il suo raggio orbitale vale $R=3,844\cdot 10^8\,\mathrm{m}$ si ottiene

$$a=4\pi^2\,\frac{3,844\cdot 10^8}{2,35\cdot 10^6\,\mathrm{s}}=2,7\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m/s^2}=0,0027\,\mathrm{m/s^2}$$

Quindi l'accelerazione a della Luna diminuisce con l'altezza. Essa è 3633 più piccola dell'accelerazione di gravità g in prossimità della superficie terrestre ($g=9,81\,\mathrm{m/s^2}$), cioè

$$\frac{g}{a}\sim 3633$$

Infine sapendo che il raggio terrestre è $R_T=6,37\cdot 10^6$ Newton scoprì che

$$\frac{g}{a}=\frac{R^2}{R_T^2}$$

Segue che la *forza con la quale la Terra attrae la Luna è inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra i due pianeti.*

2.3 Legge di gravitazione universale.

Due corpi, rispettivamente di massa m_1 e m_2, si attraggono con una forza $\mathbf{F}$ (detta forza di gravità) la cui intensità vale

$$F=G\,\frac{m_1\,m_2}{r^2}$$

dove r è la distanza tra le due masse mentre G è una costante *universale*: la stessa per tutte le coppie di corpi. Il valore di G è molto piccolo; esso è stato determinato per la prima volta da Cavendish nel 1798 mediante un famoso esperimento

$$G=6,67\cdot 10^{-11}\,Nm^2/kg^2$$

Per questo motivo la forza di attrazione che si esercita tra due oggetti qualsiasi della nostra esperienza quotidiana risulta, nei fatti, impercettibile.

2.4 La massa del sole e quella della Terra

Si supponga che il pianeta P descriva un'orbita circolare di raggio r con velocità v costante (in modulo). Il pianeta P è soggetto a un'accelerazione centripeta pari a

$$a_c = \frac{v^2}{r} \tag{2.1}$$

La forza centripeta che agisce sul pianeta deve coincidere con la forza di attrazione gravitazionale. Indicata con m_p la massa del pianeta e con M_s quella del sole si ha

$$\frac{m_p v^2}{r} = G\frac{M_s m_p}{r^2} \tag{2.2}$$

Sostituendo $v = \dfrac{2\pi r}{T}$ in (2.2) si ottiene

$$\frac{4\pi^2 m_p\, r}{T^2} = G\frac{m_p\, M_s}{r^2}$$

Semplificando l'ultima uguaglianza si ottiene:

$$M_s = \frac{4\pi^2}{G}\frac{r^3}{T^2} \tag{2.3}$$

Conoscendo il periodo di rivoluzione del pianeta e il suo raggio orbitale è possibile calcolare la massa del sole.

Esercizio 2.1. *I ragionamenti e i calcoli eseguiti poco sopra permettono di dedurre la terza legge di Keplero dalla legge di gravitazione universale nel caso di orbite circolari. Spiegare.*

Esercizio 2.2. *Sapendo il periodo di rivoluzione e il raggio dell'orbita di Luna e Ios (satellite di Giove), determinare la massa della terra e di Giove.*