Funzioni reali di variabile reale
Limiti e continuità

Mauro Saita
e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Indice

[1]

[1] Nome file: "limiti_e_funzioni_continue_2018.tex"

1 Limiti

1.1 Funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$

In questa sezione si richiamano alcune definizioni, utilizzate in seguito, relative a funzioni reali definite su un sottoinsieme di numeri reali.

Definizione 1.1 (Funzione)**.** *Una* funzione f *da* $D \subseteq \mathbb{R}$ *in* $C \subseteq \mathbb{R}$ *consiste di:*

1. *un insieme* D *detto* dominio *della funzione;*
2. *un insieme* C *detto* codominio *della funzione;*
3. *una* regola (legge) f *che assegna ad* ogni *elemento* x *del dominio un* unico *elemento* y *del codominio.*

Dominio e codominio di f devono sempre essere esplicitati, la funzione *non* è la legge, bensì l'insieme di tre ingredienti: dominio, codominio e legge. D'ora in avanti, in questa sezione, il codominio è $\mathbb{R}$.

Definizione 1.2 (Grafico di funzione)**.** *Sia* $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione reale definita su insieme* $D \subset \mathbb{R}$. *Il grafico* G_f *di* f *è il sottoinsieme del prodotto cartesiano* $D \times \mathbb{R}$

$$G(f) = \{(x, y) \in D \times \mathbb{R} \ \mid \ y = f(x)\}$$

Definizione 1.3 (Funzioni limitate)**.** *La funzione* $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *si dice*

- limitata superiormente *se, per ogni* $x \in D$, *esiste un numero reale* K *per il quale*

$$f(x) \leq K$$

- limitata inferiormente *se, per ogni* $x \in D$, *esiste un numero reale* K *per il quale*

$$f(x) \geq K$$

- limitata *se, per ogni* $x \in D$, *esiste un numero reale* K *per il quale*

$$|f(x)| \leq K$$

Se la funzione $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *non* è limitata superiormente si scrive: $\sup\limits_{x\in D} f(x) = +\infty$, se *non* è limitata inferiormente si scrive: $\inf\limits_{x\in D} f(x) = -\infty$.

Definizione 1.4 (Funzioni crescenti, decrescenti)**.** *La funzione* $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *si dice*

- crescente *se per ogni* $x_1, x_2 \in D$ *vale la condizione*

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2) \tag{1.1}$$

- decrescente *se per ogni* $x_1, x_2 \in D$ *vale la condizione*

$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2) \tag{1.2}$$

- strettamente crescente *se per ogni* $x_1, x_2 \in D$ *vale la condizione*

$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2) \tag{1.3}$$

- strettamente decrescente *se per ogni* $x_1, x_2 \in D$ *vale la condizione*

$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2) \tag{1.4}$$

Definizione 1.5 (Funzioni monotone). *La funzione* $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *si dice*

- monotona *se è crescente o decrescente.*
- strettamente monotona *se è strettamente crescente o strettamente decrescente.*

1.2 Definizione di limite

Definizione 1.6 (Limite finito, in termini di intorni). *Sia* $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione reale definita su insieme* $D \subset \mathbb{R}$*, e sia* x_0 *un punto di accumulazione di* D*. Si dice che*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L, \qquad L \in \mathbb{R} \tag{1.5}$$

se per ogni intorno $I(L, \varepsilon)$ *di* L *esiste un intorno* $I(x_0, \delta)$ *di* x_0 *che soddisfa questa condizione:*

$$\forall x \quad x \in I(x_0, \delta),\ x \in D,\ x \neq x_0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in I(L, \varepsilon) \tag{1.6}$$

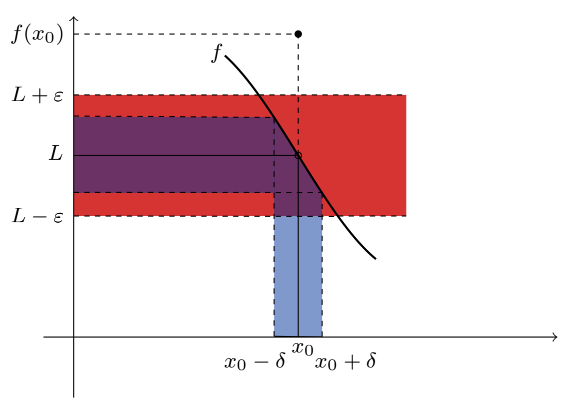


Figura 1: Definizione di $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$: *per ogni* intorno $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ di L è possibile trovare un intorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ di x_0 in modo tale che per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, con $x \neq x_0$ succede che $f(x)$ sta in $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Osservazioni.

a) Non si richiede che x_0 apppartenga al dominio D della funzione f: il punto x_0 può appartenere al dominio di f, oppure no. L'unica cosa che si richiede è che x_0 sia punto di accumulazione di D, cioè che ogni intorno di x_0 contenga infiniti punti di D.

b) Qualora x_0 appartenga al dominio di f, l'eventuale esistenza del limite e il suo valore (ammesso che il limite esista), sono del tutto indipendenti dal valore $f(x_0)$. Infatti, nella definizione di limite, il valore $f(x_0)$ non compare affatto.

   Per esempio le funzioni $\mathbb{R} \xrightarrow{f_k} \mathbb{R}$, $\quad f_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ k, & \text{se } x = 0 \end{cases}$ tendono a 1, per x che tende a x_0, qualunque sia il valore k.

c) La definizione di limite non è 'costruttiva ', nel senso che non consente di determinare mediante procedure predefinite il valore del limite, qualora esista. Essa permette solamente di verificare se un certo numero L è oppure no il limite di f, per x che tende a x_0.

d) Vale il seguente fatto

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} f(x) - L = 0 \tag{1.7}$$

   per convincersene basta scrivere la definizione di limite nel caso $\lim_{x\to x_0} f(x) - L = 0$ e osservare che è identica a quella della definizione (1.6).

e) I limiti non sempre esistono. Per esempio la funzione $\mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ non ha limite, per $x \to +\infty$.

   La 'funzione di Dirichlet' $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ non ha limite, per $x \to x_0$, qualunque sia x_0.

Se si ricorda la definizione di intorno, si vede subito che la condizione $x \neq x_0$ e $x \in I(x_0; \delta)$ equivale a: $0 < |x - x_0| < \delta$. Analogamente, la condizione $f(x) \in I(L; \varepsilon)$ equivale a: $|f(x) - L| < \varepsilon$. Quindi, la definizione di limite si può riscrivere nel modo seguente.

Definizione 1.7 (Limite finito, $\varepsilon - \delta$ definizione)**.** *Sia $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione reale definita su insieme $D \subset \mathbb{R}$, e sia x_0 un punto di accumulazione di D. Si dice che*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L, \qquad L \in \mathbb{R} \tag{1.8}$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che, per ogni $x \in D$, $x \neq x_0$,

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon \tag{1.9}$$

Le definizioni di limite destro (o da destra) e di limite sinistro (o da sinistra) sono del tutto simili:

Definizione 1.8 (Limite destro)**.** *Sia $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione reale definita su insieme $D \subset \mathbb{R}$, e sia x_0 un punto di accumulazione di D. Si dice che*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L, \qquad L \in \mathbb{R} \tag{1.10}$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che, per ogni $x \in D$, $x \neq x_0$,

$$x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon \tag{1.11}$$

Il limite da sinistra si definisce nello stesso modo: basterà richiedere che per tutti gli $x \in D$, soddisfacenti $x_0 - \delta < x < x_0$, si abbia $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Esempio. Valgono i seguenti limiti: $\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$; $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0$

Osservazione Segue subito dalle definizioni che vale $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ se, e solo se, il limite sinistro e il limite destro esistono, e sono entrambi uguali a L:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \tag{1.12}$$

Definizione 1.9 (Limite $+\infty$ (o $-\infty$))**.** *Sia $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione reale definita su insieme $D \subset \mathbb{R}$, e sia x_0 un punto di accumulazione di D. Si dice che*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \qquad \left(\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \right) \tag{1.13}$$

se per ogni $K \in \mathbb{R}$ esiste un $\delta > 0$ tale che, per ogni $x \in D$, $x \neq x_0$,

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > K \quad (\textit{rispettivamente, } f(x) < K) \tag{1.14}$$

Definizione 1.10 (Limiti a $+\infty$ (oppure a $-\infty$))**.** *Sia $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione reale definita su insieme $D \subset \mathbb{R}$ non limitato superiormente (rispettivamente: non limitato inferiormente). Si dice che*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \left(\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \right) \tag{1.15}$$

se per ogni $K \in \mathbb{R}$ esiste un $s > 0$ tale che, per ogni $x \in D$,

$$x > s \;\; (\textit{rispettivamente, } x < s) \implies f(x) > K \tag{1.16}$$

In modo analogo, diremo che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \qquad \left(\lim_{x\to-\infty} f(x) = L\right) \tag{1.17}$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ *esiste un* $r > 0$ *tale che per ogni* $x \in D$*, con* $x > r$ *(rispettivamente,* $x < r$*), si abbia* $|f(x) - L| < \varepsilon$*.*

In modo del tutto analogo (con ovvie modifiche), si definiscono altri tipi di limiti, come

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty \tag{1.18}$$

eccetera. Se si conviene di chiamare *intorni di* $+\infty$ le semirette del tipo $(a, +\infty)$, e *intorni di* $-\infty$ le semirette del tipo $(-\infty, b)$, si può spiegare in modo più semplice cosa significhi che valga un certo limite. Ad esempio,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \tag{1.19}$$

significherà : per ogni intorno $W = (K, +\infty)$ di $+\infty$ esiste un intorno $U = (-\infty, b)$ di $-\infty$ tali che per ogni x nel dominio di f, con x in U, si abbia $f(x)$ in W.

1.3 Alcuni teoremi sui limiti

1.3.1 Unicità del limite

Si è già osservato che il limite della funzione $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, per x che tende a un punto di accumulazione di D, potrebbe non esistere; tuttavia *se* tale limite esiste esso è unico.

Teorema 1.11 (di unicità del limite)**.** *Sia* $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione reale definita su insieme* $D \subset \mathbb{R}$*, e sia* x_0 *un punto di accumulazione di* D*. Se esiste il limite di* $f(x)$*, per* $x \to x_0$*, allora esso è unico.*

Dimostrazione. Si supponga, per assurdo, che esistano due numeri reali distinti L_1, L_2 per i quali risulta $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_2$. Supposto $L_1 < L_2$, si fissi $\varepsilon < \frac{L_2 - L_1}{2}$. Per ipotesi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_1$, quindi deve esistere un numero reale positivo δ_1 tale che, per ogni $x \in D$, $x \neq x_0$,

$$x_0 - \delta_1 < x < x_0 + \delta_1 \quad \Longrightarrow \quad L_1 - \varepsilon < f(x) < L_1 + \varepsilon \tag{1.20}$$

Ancora per ipotesi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_2$, quindi deve esistere un numero reale positivo δ_2 tale che, per ogni $x \in D$, $x \neq x_0$,

$$x_0 - \delta_2 < x < x_0 + \delta_2 \quad \Longrightarrow \quad L_2 - \varepsilon < f(x) < L_2 + \varepsilon \tag{1.21}$$

Allora, indicato con δ il più piccolo tra i due numeri reali positivi δ_1 e δ_2, (cioè $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$) segue che, per ogni x che sta in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ il valore $f(x)$ della funzione deve appartenere sia all'intervallo $(L_1 - \varepsilon, L_1 + \varepsilon)$ che all'intervallo $(L_2 - \varepsilon, L_2 + \varepsilon)$, ciò è assurdo perchè i due intervalli sono disgiunti (ε è stato scelto minore della semidistanza tra L_1 e L_2). ∎

1.3.2 Teorema del confronto

Teorema 1.12 (del confronto)**.** *Siano $f(x), g(x), h(x)$ tre funzioni definite su uno stesso dominio D, e sia x_0 un punto di accumulazione di D.*

Se

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \tag{1.22}$$

per ogni x (appartenenete a D) in un intorno bucato[2] *di x_0, e se*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L \tag{1.23}$$

allora

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = L \tag{1.24}$$

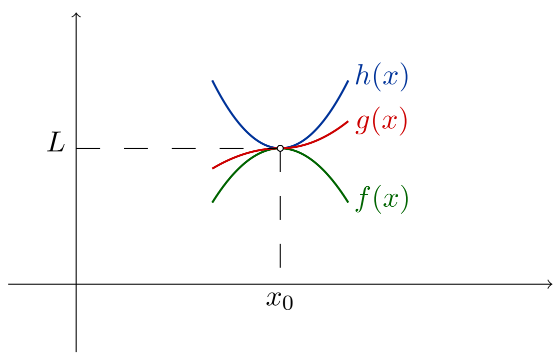


Figura 2: Il teorema del confronto è chiamato anche "teorema dei due carabinieri".

Dimostrazione. Si fissi un intorno $I(L;\varepsilon)$ di L, di raggio arbitrario $\varepsilon > 0$. Per ipotesi $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, vale quindi la seguente condizione:

$$\exists \delta_1 > 0 \quad \forall x \quad x \in I(x_0, \delta_1) \cap D,\ x \neq x_0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in I(L;\varepsilon) \tag{1.25}$$

Ancora per ipotesi $\lim_{x\to x_0} h(x) = L$,

$$\exists \delta_2 > 0 \quad \forall x \quad x \in I(x_0, \delta_2) \cap D,\ x \neq x_0 \quad \Longrightarrow \quad h(x) \in I(L;\varepsilon) \tag{1.26}$$

Posto $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Per ogni x nell'intorno $I(x_0, \delta) = I(x_0, \delta_1) \cap I(x_0, \delta_2)$ valgono entrambe le condizioni, cioè i valori $f(x)$ e $h(x)$ appartengono entrambi a $I(L;\varepsilon)$:

$$L - \varepsilon < f(x) \leq h(x) < L + \varepsilon$$

[2]Per *intorno bucato* di x_0 si intende un intorno $I(x_0; r)$ di x_0, privato del punto x_0.

Poichè vale sempre $f \leq g \leq h$, anche per ogni $x \in I(x_0, \delta)$ risulta

$$L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon$$

e quindi anche $g(x)$ cade nell'intorno $I(L; \varepsilon)$. Ciò dimostra (si ricordi la definizione di limite) che $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$. ∎

Osservazioni.

1. Un'importante applicazione del teorema del confronto è la seguente:

   Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ e la funzione $g(x)$ è limitata vicino a x_0, allora

   $$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0 \tag{1.27}$$

   Infatti: affermare che $g(x)$ è limitata vicino a x_0, equivale a dire che esiste una costante $K \in \mathbb{R}$ per la quale $|g(x)| < K$, per ogni x in un opportuno intorno I di x_0. Allora, per ogni $x \in I$, risulta

   $$0 \leq |f(x)g(x)| \leq |f(x)|\,|g(x)| \leq |f(x)|\,K \tag{1.28}$$

   Poichè $|f(x)|\,K \to 0$, per $x \to x_0$, per il teorema del confronto anche $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0$.

   Quindi, *il prodotto di una funzione infinitesima (per x che tende a x_0) per una funzione che si mantiene limitata in un intorno di x_0 è una funzione infinitesima.*

   Esempio. Si ha:

   $$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \tag{1.29}$$

   Infatti $|\sin \frac{1}{x}| \leq 1$ e quindi

   $$0 \leq \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|.1 = |x| \tag{1.30}$$

   Applicando il teorema del confronto, si ha la tesi.

2. Nel teorema del confronto, L designa un numero reale (i limiti sono finiti). Nel caso in cui $L = \pm\infty$ si può riformulare il teorema nel seguente modo

   Teorema 1.13. *Siano $f(x), g(x)$ due funzioni definite su uno stesso dominio D, e sia x_0 un punto di accumulazione di D.*

   (a) *Se $f(x) \geq g(x)$ per ogni x (appartenenete a D) in un intorno bucato di x_0, e se $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$*

   (b) *Se $f(x) \leq g(x)$ per ogni x (appartenenete a D) in un intorno bucato di x_0, e se $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$*

   In altri termini *la maggiorante di una funzione divergente a $+\infty$ diverge a $+\infty$* e *la minorante di una funzione divergente a $-\infty$ diverge a $-\infty$.*

   La dimostrazione è lasciata per esercizio.

1.3.3 Teorema di permanenza del segno

Come al solito, si supponga che f sia una funzione reale con dominio $D \subset \mathbb{R}$, e che x_0 sia un punto di accumulazione di D. Il teorema seguente è molto semplice, ma può essere utile.

Teorema 1.14 (Permanenza del segno)**.** *Se* $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \neq 0$*, allora esiste un intorno* $I = I(x_0; \delta)$ *tale che per ogni* $x \in I$ *(con* $x \neq x_0$ *e* $x \in D$*),* $f(x)$ *ha lo stesso segno del limite* L*.*

Dimostrazione. Per fissare le idee, si supponga $L > 0$. Se ε è sufficientemente piccolo (per esempio, minore di $L/2$), l'intorno $I(L; \varepsilon)$ non contiene lo 0, e quindi è costituito interamente da numeri positivi. Fissato un tale ε, esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in D$ soddisfacente $0 < |x - x_0| < \delta$, risulta $f(x) \in I(L; \varepsilon)$:

$$0 < L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

Dunque, per ogni x nell'intorno $I(x_0; \delta)$, $f(x)$ si mantiene maggiore di zero. ∎

1.3.4 Teorema sulla somma, prodotto e quoziente di limiti

Teorema 1.15 (Somma, prodotto e quoziente di limiti)**.** *Siano* $f(x)$ *e* $g(x)$ *due funzioni tali che*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1 \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = L_2 \tag{1.31}$$

Allora:

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = L_1 + L_2$
2. $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = L_1 L_2$
3. *Se* $L_2 \neq 0$*, allora* $\lim_{x \to x_0} f(x)/g(x) = L_1/L_2$

Dimostrazione. A titolo d'esempio, si riporta la dimostrazione della prima uguaglianza, sul limite della somma. Si fissi un $\varepsilon > 0$. Poichè $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$, esiste un δ_1 tale che per ogni x che soddisfi $0 < |x - x_0| < \delta_1$, risulta $|f(x) - L_1| < \varepsilon$. Analogamente, poichè $\lim_{x \to x_0} g(x) = L_2$,esiste un un δ_2 tale che per ogni x, con $0 < |x - x_0| < \delta_2$, risulta $|g(x) - L_2| < \varepsilon$. Se si prende δ uguale al più piccolo di δ_1 e δ_2, per $0 < |x - x_0| < \delta$ si avrà sia $|f(x) - L_1| < \varepsilon$ sia $|g(x) - L_2| < \varepsilon$. Quindi si ottiene

$$|f(x) + g(x) - L_1 - L_2| \leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| < 2\varepsilon$$

cioè $f(x) + g(x)$ tende a $L_1 + L_2$. ∎

1.4 Le funzioni monotone hanno limite

Teorema 1.16. *Se $(a,b) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ è una funzione crescente allora*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \inf_{x\in(a,b)} f(x) \qquad e \qquad \lim_{x\to b^-} f(x) = \sup_{x\in(a,b)} f(x)$$

Gli estremi dell'intervallo (a,b) possono essere finiti o infiniti. Per funzioni decrescenti sull'intervallo (a,b) vale un teorema analogo il cui enunciato (e relativa dimostrazione) è lasciato per esercizio.

Dimostrazione. Qui ci si limita a dimostrare che $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \sup\limits_{x\in(a,b)} f(x)$.

È necessario distinguere due casi

Primo caso: f limitata superiormente, cioè $\sup\limits_{x\in(a,b)} f(x) = S < +\infty$.

Si prenda $\varepsilon > 0$. Il numero $S-\varepsilon$ non è un maggiorante di f quindi deve esistere un x_1 in (a,b) per il quale $f(x_1) > S-\varepsilon$. Essendo la funzione f crescente su (a,b), per ogni x compreso tra x_1 e b, si ha: $f(x) \geq f(x_1) > S-\varepsilon$. Inoltre, per ipotesi, $\sup\limits_{x\in(a,b)} f(x) = S$ e quindi $f(x) \leq S$.

Riassumendo: per ogni $\varepsilon > 0$ è possibile trovare un intorno sinistro (x_1, b) di b per il quale si ha

$$x \in (x_1, b) \quad \Longrightarrow \quad S - \varepsilon < f(x) \leq S \tag{1.32}$$

Segue che $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = S$.

Secondo caso: f non limitata superiormente , cioè $\sup\limits_{x\in(a,b)} f(x) = +\infty$.

Per ogni $M > 0$ esiste $x_1 \in (a,b)$ tale che $f(x_1) > M$. Inoltre, essendo f crescente, si ha

$$x \in (x_1, b) \quad \Longrightarrow \quad f(x) > M \tag{1.33}$$

Segue che $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = +\infty$.

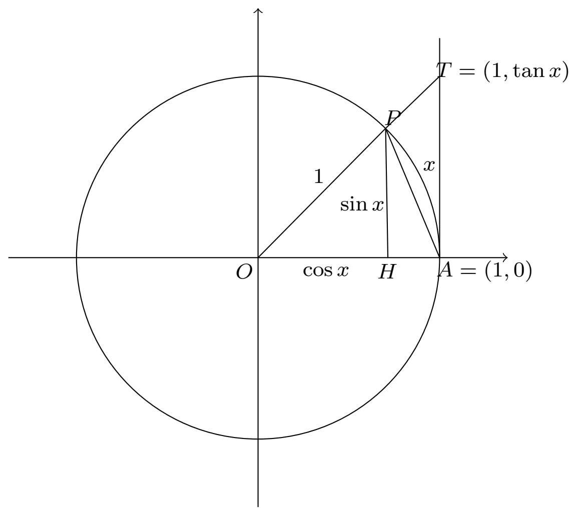
∎

1.5 Le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ vicino a zero

In questo paragrafo, si presentano alcuni limiti importanti in cui compaiono le funzioni seno e coseno. Con la lettera x si denota la misura degli archi espressa in radianti.

1. *Quando $0 < |x| < \pi/2$, valgono le disuguaglianze*

$$\boxed{\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1} \tag{1.34}$$



Dimostrazione. Anzitutto si consideri il caso $0 < x < \pi/2$. Con riferimento alla figura, valgono le ovvie disuguaglianze:

$$\text{area triangolo } OAP \; < \; \text{area settore circolare } OAP \; < \; \text{area triangolo } OAT \tag{1.35}$$

che si scrivono

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x \tag{1.36}$$

Moltiplicando per il numero (positivo) $2/\sin x$, si ottiene

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \tag{1.37}$$

ossia:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \tag{1.38}$$

per ogni $0 < x < \pi/2$.

La relazione (1.38) è vera anche per $-\pi/2 < x < 0$, infatti i suoi termini restano uguali se si sostituisce $-x$ al posto di x. ∎

2.

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \sin x = 0} \tag{1.39}$$

Per $0 < |x| < \pi/2$, $\cos x > 0$. Dalla disuguaglianza (1.34), si ottiene

$$0 < \frac{\sin x}{x} < 1 \tag{1.40}$$

$$0 < |\sin x| < |x| \tag{1.41}$$

Quindi per il teorema del confronto, $\sin x \to 0$, quando x tende a zero.

3.
$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1 \tag{1.42}$$

Poichè
$$0 \leq 1 - \cos x = \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} = \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} < \sin^2 x \tag{1.43}$$
per il teorema del confronto, si ha
$$\lim_{x\to 0} 1 - \cos x = 0 \tag{1.44}$$
ossia la tesi.

4. Risulta
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{1.45}$$

Infatti, abbiamo visto che (per $|x|$ piccolo e diverso da 0) valgono le disuguaglianze
$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \tag{1.46}$$
Quando $x \to 0$, dal teorema del confronto segue allora (ricordando che $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{1.47}$$

5. Vale:
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \tag{1.48}$$

Infatti:
$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{1}{1+\cos x} \tag{1.49}$$
Quando $x \to 0$, il termine $\frac{\sin x}{x}$ tende a 1, mentre $\frac{1}{1+\cos x}$ tende a $1/2$. Quindi,
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2} \tag{1.50}$$

1.6 Relazione $\sim$ di asintotico e di o-piccolo

Definizione 1.17. *Si dice che $f(x)$ è asintotica a $g(x)$ per $x \to x_0$, o in x_0, se*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \tag{1.51}$$

In questa definizione, x_0 può anche essere $+\infty$ o $-\infty$.

Si noti che non ha senso affermare soltanto: "$f(x) \sim g(x)$". Bisogna sempre specificare: $f(x) \sim g(x)$, per $x \to x_0$.

Esempi.

1) Si ha:

$$\sin x \sim x, \qquad x \to 0 \tag{1.52}$$

Infatti, abbiamo visto che $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

2) Si ha:

$$1 - \cos x \sim \tfrac{1}{2}x^2, \qquad x \to 0 \tag{1.53}$$

Segue subito da: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

3) Vale la relazione:

$$x^3 + x^2 + x \sim x^3 \qquad x \to +\infty \tag{1.54}$$

Infatti,

$$\frac{x^3 + x^2 + x}{x^3} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

tende a 1, per $x \to +\infty$.

Definizione 1.18. *Si dice che una funzione $f(x)$ è o-piccolo di $g(x)$ per $x \to x_0$, e si scrive*

$$f(x) = o(g(x)), \; x \to x_0 \tag{1.55}$$

se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \tag{1.56}$$

In questa definizione, x_0 può anche essere $+\infty$ o $-\infty$.

Se $f(x)$ è $o(g(x))$, per $x \to x_0$, diremo anche che $f(x)$ è *trascurabile* rispetto a $g(x)$, per $x \to +\infty$.

Se $f(x)$ e $g(x)$ tendono entrambe a zero, per $x \to x_0$, e $f(x)$ è $o(g(x))$, diremo che $f(x)$ è un *infinitesimo di ordine superiore* rispetto a $g(x)$.

Se $f(x)$ e $g(x)$ tendono entrambe a $+\infty$, per $x \to x_0$, e $f(x)$ è $o(g(x))$, diremo che $f(x)$ è un *infinito di ordine inferiore* rispetto a $g(x)$.

Esempi.

1) $f(x) = x^2$ è $o(x)$, per $x \to 0$.

2) $1 - \cos x$ è $o(x)$, per $x \to 0$.

3) $\ln x$ è $o(x)$, per $x \to +\infty$. Infatti, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

2 Asintoti

Definizione 2.1 (Asintoto verticale)**.** *La retta $x = x_0$ si chiama* asintoto verticale *del grafico della funzione f, se è soddisfatta una delle seguenti condizioni:*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0^+} f(x) &= +\infty \ (\textit{oppure} \ -\infty) \\ \lim_{x\to x_0^-} f(x) &= +\infty \ (\textit{oppure} \ -\infty) \end{aligned}$$

Definizione 2.2 (Asintoto orizzontale)**.** *La retta $y = L$ si dice* asintoto orizzontale *del grafico della funzione f, per $x \to +\infty$, se è soddisfatta la condizione:*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \tag{2.1}$$

Analogamente, la retta $y = K$ si dice asintoto orizzontale *per la funzione f, per $x \to -\infty$, se*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = K \tag{2.2}$$

Definizione 2.3 (Asintoto obliquo)**.** *La retta $y = mx + q$ $(m \neq 0)$ si dice* asintoto obliquo *del grafico della funzione $y = f(x)$, per $x \to +\infty$, se*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (mx + q) = 0, \tag{2.3}$$

ossia, in modo equivalente, se

$$f(x) = mx + q + o(1), \qquad \textit{per } x \to +\infty \tag{2.4}$$

dove $o(1)$ designa una funzione infinitesima per $x \to +\infty$.

In modo analogo si definisce un asintoto obliquo per f, per $x \to -\infty$.

La condizione (2.3) – e la condizione equivalente (2.4) – dicono che la differenza tra l'ordinata del punto $(x, f(x))$ sul grafico di f e l'ordinata del punto $(x, mx + q)$ (con la stessa ascissa) sulla retta $y = mx + q$, tende a zero, per $x \to +\infty$.

2.1 Regola per la determinazione dell'asintoto obliquo

Osservazione. Se la retta di equazione $y = mx + q$ è asintoto per f a $+\infty$, cioè vale (2.4), allora si ha:

1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m, \qquad (m \neq 0)$

(Infatti, da (2.4) segue: $\frac{f(x)}{x} = m + \frac{q}{x} + \frac{o(1)}{x}$. Ora, è ovvio che $\frac{q}{x} \to 0$; del resto, anche $\frac{o(1)}{x} \to 0$, perchè il numeratore tende a 0 e il denominatore a $+\infty$. Quindi, $f(x)/x$ tende a m, per $x \to +\infty$).

2) Il numero q è uguale al seguente limite: $q = \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx$. (Ovvio, vista l'uguaglianza (2.4)).

Si vede subito che il ragionamento si inverte:

Regola per trovare l'asintoto obliquo. Sia $f(x)$ una funzione definita su una semiretta $(a, +\infty)$. Se valgano *entrambe* le condizioni seguenti:
a) Esiste finito, ed è un numero diverso da zero, il limite:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m, \qquad m \neq 0 \tag{2.5}$$

b) Esiste finito il limite

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - mx = q \tag{2.6}$$

allora la retta $y = mx + q$ è asintoto obliquo per la funzione $y = f(x)$, per $x \to +\infty$.

Si osservi che l'esistenza del limite (2.5) equivale a dire che $f(x) \sim mx$, $m \neq 0$, ($f(x)$ è asintotica a mx), per $x \to +\infty$. Ma questa condizione, da sola, non è sufficiente per concludere che f abbia un asintoto a $+\infty$: occorre anche la condizione (2.6).

Dimostrazione della Regola per l'asintoto.

Il coefficiente angolare $m(\neq 0)$ dell'asintoto (se questo esiste) non può che essere dato da $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$, per la precedente osservazione. Inoltre, se anche il limite (2.6) esiste finito, allora $f(x) - mx = q + o(1)$, ossia vale la condizione (2.4) e pertanto $y = mx + q$ è asintoto obliquo di $f(x)$. ∎

Esempio. Sia $f(x) = x + 2\,\frac{\sin x}{x}$.

Per $x \to +\infty$, la funzione $\frac{\sin x}{x}$ è $o(1)$ (è infinitesima):

$$f(x) = x + o(1)$$

Dunque, si legge subito che la retta di equazione $y = x$ è asintoto obliquo per $f(x)$, per $x \to +\infty$.

Si noti che il grafico di $f(x)$ non si avvicina alla retta $y = x$ sempre da sopra, nè sempre da sotto, ma oscillando e intersecando l'asintoto infinite volte.

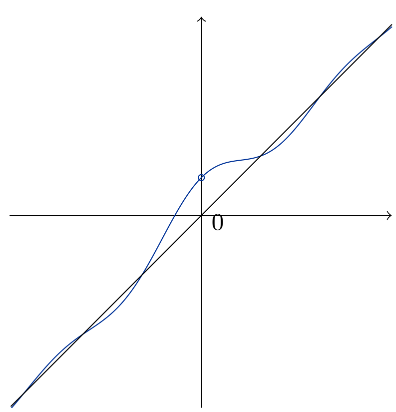


Figura 3: Grafico della funzione $f(x) = x + 2\frac{\sin x}{x}$.

Esempio. Si consideri la funzione $f(x) = x + \ln x$, definita sulla semiretta $(0, +\infty)$. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

Quindi, l'unico candidato coefficiente angolare per l'asintoto è $m = 1$. Ma

$$f(x) - x = \ln x$$

non ha limite finito per $x \to +\infty$. Dunque, non esiste un asintoto obliquo.

Attenzione. Si noti che $x + \ln x \sim x$ ($x + \ln x$ è asintotico a x), per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x + \ln x}{x} = 1$$

Però la retta $y = x$ non è asintoto di $x + \ln x$.

3 Funzioni reali continue

3.1 Definizione di funzione continua

Si consideri la funzione $D \xrightarrow{f} C$ (con D, C sottoinsiemi di $\mathbb{R}$) e un punto $x_0 \in D$. La funzione f è *continua in* x_0 se, spostando di poco il punto x dal punto x_0, il punto $f(x)$ si sposta di poco quanto si vuole dal punto $f(x_0)$. In altre parole, f è continua in x_0 se a 'piccole' variazioni da x_0 della variabile indipendente x corrispondono piccole variazioni da $f(x_0)$ del valore f(x).

Prima di dare la definizione formale di continuità occorre ricordare che la distanza tra due punti x_1, x_2 in $\mathbb{R}$ è data da $|x_1 - x_2|$.

Definizione 3.1 (Definizione ε-δ di continuità). *La funzione* $\mathbb{D} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ *è continua in*

$x_0 \in D$ *se si verifica la seguente proprietà :*

per ogni $\epsilon > 0$ *esiste un* $\delta > 0$ *tale che, per tutti gli* $x \in \mathbb{R}$*, se* $|x - x_0| < \delta$ *allora*

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

In termini più concisi, una funzione $D \xrightarrow{f} C$ *è continua in* $x_0 \in \mathbb{R}$ *se la seguente condizione è soddisfatta:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad\qquad |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

La condizione scritta sopra dice che, comunque si fissi un intorno W (nel codominio di f)

$$W = \{y \in \mathbb{R} \mid \quad |y - f(x_0)| < \varepsilon\}$$

di centro $f(x_0)$ e raggio ε, esiste un intorno (nel dominio di f)

$$U = \{x \in \mathbb{R} \mid \quad |x - x_0| < \delta\}$$

di centro x_0 e raggio δ), tale che

$$f(U) \subset W$$

In base alla definizione appena data è immediato verificare che se $x_0 \in D$ è un punto *isolato* di D, allora ogni funzione è continua in x_0.

Il caso più significativo (e più frequente) è quello di un punto $x_0 \in D$ che sia *punto di accumulazione* di D (x_0 è punto di accumulazione di D se ogni intorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, contiene infiniti punti del dominio D di f). In questo caso è possibile fornire una definizione di continuità eqivalente a quella data sopra, in termini di limite

Definizione 3.2 (Definizione di continuità in termini di limite). *Se* $x_0 \in D$ *e* x_0 *è punto di accumulazione di* D *allora la funzione* $\mathbb{D} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ *è continua in* x_0 *se esiste finito il limite di* f *per* $x \to x_0$ *e risulta:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Riassumendo,

1. se x_0 appartiene a D e x_0 è un punto isolato di D (cioè x_0 non è punto di accumulazione di D) allora ogni funzione f è continua in x_0.

2. se x_0 appartiene a D e x_0 è un punto di accumulazione di D, allora

$$f \text{ è continua in } x_0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

mentre f *non* è continua in x_0 se si verifica una delle seguenti condizioni:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \begin{cases} \text{non esiste} \\ \pm\infty \\ L \neq f(x_0) \end{cases}$$

Per esempio, si consideri la funzione $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{C}, f(x) = \frac{1}{x}$ non è corretto dire (come purtroppo fanno alcuni manuali di analisi) che f non è continua in $x_0 = 0$ perchè x_0 non appartiene al dominio di f.

Funzioni elementari e continuità

Si dimostra (non qui) che la maggior parte delle funzioni elementari finora incontrate sono continue nei rispettivi domini. Per esempio è continua (nel proprio dominio)

- la funzione identità $\mathbb{R} \xrightarrow{I} \mathbb{R}$, $I(x) = x$ (per ogni $x \in \mathbb{R}$);
- la funzione costante $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = k$ (per ogni $x \in \mathbb{R}$);
- la funzione reciproco $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ (per ogni $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$);
- la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ (per ogni $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$);
- la funzione seno $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ (per ogni $x \in \mathbb{R}$);
- la funzione coseno $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$ (per ogni $x \in \mathbb{R}$);
- la funzione logaritmo $\mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$ (per ogni $x \in \mathbb{R}> 0$, $a \in \mathbb{R}_{>0}$ e $a \neq 1$);
- la funzione esponenziale $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ (per ogni $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_{>0}$ e $a \neq 1$););.

3.2 Prime proprietà delle funzioni continue

Vediamo ora le prime proprietà delle funzioni continue.

Teorema 3.3 (Permanenza del segno). *Sia* $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione continua nel punto* $x_0 \in \mathbb{R}$ *e positiva in* x_0*:*

$$f(x_0) > 0$$

Allora esiste un intorno $U \subset \mathbb{R}$ *di* x_0 *in cui la funzione* f *si mantiene positiva:*

$$\forall x \in U \qquad f(x) > 0$$

Dimostrazione. Poiché $f(x_0)$ è maggiore di zero, ogni intorno sufficientemente piccolo di $f(x_0)$ contiene solo numeri positivi. Precisamente, fissato un numero positivo $\varepsilon < f(x_0)$, l'intorno aperto $W = (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ di $f(x_0)$ contiene soltanto numeri positivi (fare una figura). Fissato un tale W, poiché f è continua in x_0, esiste un intorno U di x_0 tale che $f(U) \subset W$. Siccome in W ci sono solo numeri positivi, si ha $f(x) > 0$, per ogni $x \in U$. ∎

Valgono inoltre i seguenti teoremi.

Teorema 3.4 (Somma di funzioni continue). *La somma di due funzioni reali di variabile reale, entrambe continue in* x_0*, è continua in* x_0*, cioè*

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \text{ e } \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \text{ continue in } x_0 \implies \mathbb{R} \xrightarrow{f+g} \mathbb{R} \text{ continua in } x_0$$

Teorema 3.5 (Prodotto di funzioni continue). *Il prodotto di due funzioni reali di variabile reale, entrambe continue in* x_0*, è continua in* x_0*, cioè*

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \text{ e } \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \text{ continue in } x_0 \implies \mathbb{R} \xrightarrow{fg} \mathbb{R} \text{ continua in } x_0$$

Teorema 3.6 (Quoziente di funzioni continue). *Siano* $f(x)$ *e* $g(x)$ *due funzioni continue a valori reali, con* $g(x) \neq 0$ *per ogni* x*. Allora il quoziente* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *è una funzione continua.*

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \text{ e } \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \text{ continue in } x_0 \implies \mathbb{R} \xrightarrow{f/g} \mathbb{R} \text{ continua in } x_0$$

Teorema 3.7 (Composizione di funzioni continue). *La funzione composta di due funzioni continue è continua.*

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \text{ continua in } x_0 \text{ e } \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \text{ continua in } y_0 = f(x_0) \implies \mathbb{R} \xrightarrow{g \circ f} \mathbb{R} \text{ continua in } x_0$$

Di quest'ultimo teorema si darà una dimostrazione più avanti.

3.3 Funzioni continue e successioni

In questo paragrafo si mostra che la definizione di funzione continua si può esprimere anche in termini di successioni. Vale infatti il seguente teorema

Teorema 3.8 (Continuità per successioni)**.** *Sia* $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione e sia* x_0 *un punto di* D*. I due seguenti fatti sono allora equivalenti:*

(1) f *è continua in* $x_0 \in D$*.*

(2) *per ogni successione* x_n*,* $n \in \mathbb{N}$*, di elementi di* D*,*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

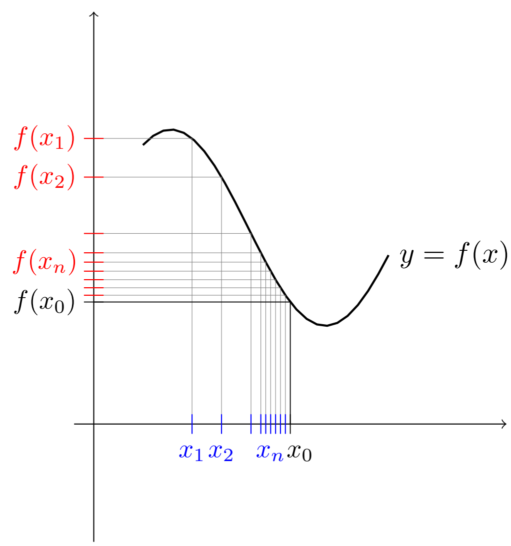


Fig.1 - La funzione $y = f(x)$ è continua in x_0 se e solo se vale la seguente proprietà : $x_n \longrightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$.

La dimostrazione di questo teorema non è in programma perchè un pò difficile. Tuttavia è istruttiva, costringe a riflettere sulla definizione di continuità e su cosa significhi negare che una funzione sia continua in un punto. Chi volesse studiarla, accettando la sfida, può decidere di esporla durante le interrogazioni orali.

Dimostrazione.

(1) $\Rightarrow$ (2). Dimostriamo che la successione $f(x_n)$ converge a $f(x_0)$. Fissiamo un numero $\varepsilon > 0$, ad arbitrio. Per la continuità di f in x_0, esiste un $\delta > 0$ tale che, per ogni $x \in D$ soddisfacente $|x - x_0| < \delta$, si ha $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Ma per n sufficientemente grande, tutti gli elementi x_n appartengono all'intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (perché $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$). Pertanto, per tutti gli n sufficientemente grandi, si ha $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$. Questo dimostra che $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$. A parole: le funzioni continue commutano con 'lim'.

(2) $\Rightarrow$ (1). Supponiamo, per assurdo, che f non sia continua in x_0. Affermare che f non è continua in x_0 significa che esiste un numero positivo ε tale che, per ogni δ, esiste un punto

$x \in D$ tale che $|x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - f(x_0)| > \varepsilon$. Scegliamo

$$\delta_1 = 1, \quad \delta_2 = 1/2, \quad \delta_3 = 1/3, ..., \delta_n = 1/n, ...$$

Per ogni δ_n c'è un punto x_n per il quale $|x_n - x_0| < 1/n$ e $|f(x_n) - f(x_0)| > \varepsilon$. Dunque la successione x_n converge a x_0, ma la successione $f(x_n)$ non converge a $f(x_0)$. Questo fatto contraddice l'ipotesi. ∎

4 Un elenco di limiti importanti

1. Ricordiamo che la costante e di Napier (o numero di Eulero) si definisce come il limite della successione $(1 + \frac{1}{n})^n$, che è convergente in $\mathbb{R}$ in quanto è crescente e superiormente limitata. Ciò premesso, risulta (qui non si riporta la dimostrazione)

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \tag{4.1}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \tag{4.2}$$

2. Dai precedenti limiti, segue subito:

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \tag{4.3}$$

(Quest'ultimo limite si ricava subito dai limiti (4.1) (4.2) con la sostituzione $x = 1/t$).

3. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha \tag{4.4}$$

Infatti, $\left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = \left[\left(1 + \frac{1}{x/\alpha}\right)^{x/\alpha}\right]^\alpha$, che tende a e^α per $x \to +\infty$.

4. Per ogni $a > 0$ e per ogni base $b > 0$, $(b \neq 1)$,

$$\lim_{x \to 0^+} x^a \log_b x = 0 \tag{4.5}$$

(Questo limite si presenta come una forma di indeterminazione $0 \cdot \infty$. Si noti che lo stesso limite (4.5) continua a valere 0 anche nel caso $a < 0$, ma in tale caso non è più una forma di indeterminazione). Si dimostrerà la validità del limite (4.5) più avanti, mediante il teorema di De L'Hospital.

5.
$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} x^x = 1} \tag{4.6}$$

Infatti, basta scrivere $x^x = e^{x\ln x}$ e osservare che l'esponente $x\ln x$ tende a 0 per $x \to 0^+$.

6. Ricordiamo come si comportano all'infinito le funzioni esponenziali a^x:
$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < a < 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ +\infty & \text{se } a > 1 \end{cases}} \tag{4.7}$$

7. Per ogni $\beta > 0$,
$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} \frac{x^\beta}{e^x} = 0} \tag{4.8}$$

Dunque x^β è un infinito di ordine inferiore rispetto a e^x, per $x \to +\infty$. (Dimostrazione più avanti, con il teorema di De L'Hospital).

8. Più in generale, per ogni $\beta > 0$ e per ogni base a dell'esponenziale a^x,
$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} \frac{x^\beta}{a^x} = 0} \tag{4.9}$$

9. Per ogni $\alpha > 0$, $\beta > 0$,
$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0} \tag{4.10}$$

Dunque $\ln x$ (o una sua qualunque potenza $(\ln x)^\alpha$, $\alpha > 0$) è un infinito di ordine inferiore rispetto a x (o a una sua qualunque potenza x^β), quando $x \to +\infty$. Per dimostrare che vale il limite (4.10), basta operare la sostituzione $\ln x = t$ e utilizzare il limite (4.9)

10.
$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1} \tag{4.11}$$

La dimostrazione di questo limite è stata presentata in una sezione precedente.

11.
$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}} \tag{4.12}$$

La dimostrazione di questo limite è stata presentata in una sezione precedente.

12. $$\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \tag{4.13}$$

    Infatti, $x \sin \frac{1}{x}$, per $x \to 0$, è il prodotto di una funzione infinitesima (x) e di una limitata ($\sin \frac{1}{x}$).

13. Per ogni $a \in \mathbb{R}_{>0}$, $a \neq 1$

    $$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a} \tag{4.14}$$

14. $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \tag{4.15}$$

    Caso particolare del limite precedente.

15. Per ogni $a \in \mathbb{R}_{>0}$, $a \neq 1$
    $$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \tag{4.16}$$

16. $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \tag{4.17}$$

    Caso particolare del limite precedente.

17. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$
    $$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \tag{4.18}$$

5 Proprietà delle funzioni reali continue su un intervallo

In questa sezione si considerano soltanto *funzioni reali di variabile reale*, ossia funzioni il cui dominio e il cui codominio sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

5.1 Teorema degli zeri

Teorema 5.1 (Teorema degli Zeri)**.** *Sia $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione definita su un intervallo I di $\mathbb{R}$ e continua. Siano a, b due punti appartenenti a I, con $a < b$. Supponiamo che i valori $f(a)$ e $f(b)$ abbiano segni opposti. (Vale a dire, $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, o viceversa). Allora esiste almeno un punto $\alpha \in (a, b)$ in cui si ha $f(\alpha) = 0$.*

Dimostrazione. La dimostrazione del teorema degli zeri consiste nel presentare un algoritmo (detto **metodo di bisezione** o metodo dicotomico) per mezzo del quale è possibile trovare un punto in cui f si annulla.

Per fissare le idee si supponga $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ e si consideri il punto medio $c = \dfrac{a+b}{2}$ dell'intervallo $[a, b]$. Possono presentarsi due casi. Se $f(c) = 0$ il problema è risolto (si è trovato uno zero di f). Se invece $f(c) \neq 0$, si scelga tra i due intervalli $[a, c]$ e $[c, b]$ quello in cui la funzione f assume valori discordi agli estremi. Tenuto conto delle nostre scelte iniziali ($f(a) < 0$ e $f(b) > 0$), si tratta di scegliere l'intervallo in cui la funzione assume valore negativo nell'estremo di sinistra e valore positivo nell'estremo di destra. Quindi se $f(c) \neq 0$, si scelga l'intervallo $I_1 = [i_1, j_1]$ nel modo seguente :

$$I_1 = [i_1, j_1] = \begin{cases} [a, c] & \text{se} \quad f(c) > 0 \\ \\ [c, b] & \text{se} \quad f(c) < 0 \end{cases} \tag{5.1}$$

Si operi ora sull'intervallo $I_1 = [i_1, j_1]$ nello stesso modo in cui si è operato sull'intervallo $[a, b]$. Precisamente: sia c_1 il punto medio di $[i_1, j_1]$. Se $f(c_1) = 0$ il problema è risolto (c_1 è uno zero di f). Altrimenti si scelga tra i due intervalli $[i_1, c_1]$ e $[c_1, j_1]$ quello in cui la funzione assume valore negativo nell'estremo di sinistra e positivo nell'estremo di destra. Iterando questo procedimento, si possono avere due casi:

1. Esiste un intero positivo k tale che la funzione si annulla nel punto medio c_k dell'intervallo $[i_k, j_k]$. In questo caso si è trovato un punto c_k nel quale la funzione f si annulla, e la tesi del teorema è dimostrata.

2. La funzione non si annulla in nessun punto medio c_k. In questo caso si ottiene una successione infinita di intervalli compatti inscatolati

$$[i_1, j_1] \supset [i_2, j_2] \supset [i_3, j_3] \supset \cdots \supset [i_n, j_n] \supset \cdots$$

con le due seguenti proprietà:

- nell'estremo di sinistra di ogni intervallo la funzione assume valore negativo, mentre nell'estremo di destra assume valore positivo, cioè per ogni k ($0 \leq k \leq n$) abbiamo $f(i_k) < 0$ e $f(j_k) > 0$.

- gli intervalli hanno ampiezza $j_k - i_k = \dfrac{b-a}{2^k}$

Si è dunque costruito una successione di intervalli compatti inscatolati le cui ampiezze tendono a zero. Per il teorema sugli intervalli inscatolati (conseguenza della completezza di $\mathbb{R}$) esiste un unico numero reale α che appartiene a tutti gli intervallini $[i_n, j_n]$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. A tale numero α convergono le due successioni i_n e j_n:

$$\lim_{n\to+\infty} i_n = \alpha = \lim_{n\to+\infty} j_n$$

Poiché f è continua in $x = \alpha$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} f(i_n) = f(\alpha) \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} f(j_n) = f(\alpha)$$

Poiché $f(i_n) < 0$ per ogni n, si deve avere

$$f(\alpha) = \lim_{n\to+\infty} f(i_n) \leq 0$$

Analogamente, poiché $f(j_n) > 0$ per ogni n, si deve avere

$$f(\alpha) = \lim_{n\to+\infty} f(j_n) \geq 0$$

Poichè le due ultime disuguaglianze devono valere contemporaneamente, si ha $f(\alpha) = 0$ e quindi α è uno zero di f. ∎

Quante iterazioni?

Al passo m l'intervallo di approssimazione della radice è $[i_m, j_m]$ e l'ampiezza di tale intervallo è $|j_m - i_m| = \dfrac{b-a}{2^m}$. *Quante iterazioni sono necessarie se si vuole guadagnare una cifra significativa nell'accuratezza della approssimazione della radice?*

Per fare ciò occorre ridurre l'intervallo $[i_m, j_m]$ di $\dfrac{1}{10}$. In altre parole, bisogna determinare un intervallo $[i_k, j_k]$ in modo tale che

$$|j_k - i_k| = \frac{1}{10}|j_m - i_m| \tag{5.2}$$

ossia

$$\frac{b-a}{2^k} = \frac{1}{10}\frac{b-a}{2^m} \tag{5.3}$$

Dall'uguaglianza (5.3) si ricava: $2^{k-m} = 10$. Pertanto, sono necessarie

$$k - m = \log_2 10 \sim 3,32 \texttt{ bisezioni} \tag{5.4}$$

Dai calcoli appena fatti segue che, se sono soddisfatte le ipotesi del teorema degli zeri, il metodo di bisezione permette di approssimare la radice c dell'equazione $f(x) = 0$ con qualunque grado di precisione si desideri. Tuttavia, per farlo, può essere necessario eseguire un numero di iterazioni molto elevato. In altre parole, *il metodo di bisezione è un algoritmo di sicura, ma lenta convergenza.*

5.2 Punti fissi di una funzione.

Si ricordi che $x \in [a, b]$ è un *punto fisso* della funzione $[a, b] \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ se soddisfa l'equazione $g(x) = x$

Il problema della ricerca di punti fissi si può sempre trasformare in un problema equivalente di ricerca degli zeri e viceversa. Più precisamente, l'equazione

$$g(x) = x \tag{5.5}$$

è equivalente a

$$g(x) - x = 0 \tag{5.6}$$

Allora, posto $f(x) = g(x) - x$, ricercare i punti fissi della funzione g equivale a ricercare gli zeri della funzione f.

$$f(x) = 0 \tag{5.7}$$

Il seguente teorema esprime alcune condizioni che garantiscono, per una certa funzione g, l'esistenza di almeno un punto fisso.

Teorema 5.2. *Se $[a, b] \xrightarrow{g} [a, b]$ è una funzione continua in $[a, b]$ allora l'equazione $g(x) = x$ ammette almeno una soluzione.*

Dimostrazione.

Se $g(a) = a$ o $g(b) = b$ il teorema è dimostrato, altrimenti si ha $g(a) - a > 0$ e $g(b) - b < 0$. La funzione $g(x) - x$ risulta definita e continua in $[a, b]$ e, pertanto, il *teorema degli zeri* assicura che l'equazione $g(x) - x = 0$ ammette almeno una soluzione nell'intervallo $[a, b]$. ■

Si noti che il teorema (5.2) garantisce l'*esistenza* ma non l'*unicità* del punto fisso (tracciare il grafico di una funzione $[a, b] \xrightarrow{g} [a, b]$ che abbia più di un punto fisso in $[a, b]$.).

5.3 Teorema dei valori intermedi

Definizione 5.3 (Intervallo di $\mathbb{R}$)**.** *Un sottoinsieme I di $\mathbb{R}$ è un intervallo se e solo se soddisfa la proprietà seguente, detta di* convessità*:*

per ogni coppia x, y di punti di I, con $x < y$, e per ogni punto $w \in \mathbb{R}$ vale la condizione

$$x < w < y \implies w \in I$$

In altre parole un sottoinsieme I di $\mathbb{R}$ è un intervallo se per ogni coppia x, y di punti di I, con $x < y$, e per ogni punto w soddisfacente la condizione $x < w < y$ allora anche w appartiene a I. In base alla definizione appena data un *intervallo* di $\mathbb{R}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ di uno dei seguenti tipi (a, b sono numeri reali, $a \leq b$):

1. $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (intervallo aperto);
2. $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$;
3. $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$,
4. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$, (intervallo chiuso e limitato, o intervallo compatto);
5. $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$, (semiretta aperta);
6. $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$, (semiretta chiusa);
7. $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$, (semiretta aperta);
8. $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$, (semiretta chiusa);
9. L'intera retta reale $\mathbb{R}$.

Si osservi che un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ costituito da un solo punto è un intervallo, si ottiene, per esempio, dal caso $[a, b]$, con $a = b$. Anche l'insieme vuoto è un intervallo e precisamente (a, b) , con $a = b$.

Teorema 5.4 (Teorema dei valori intermedi)**.** *Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e sia $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione continua. Se a e b appartengono a I, la funzione f assume ogni valore compreso tra $f(a)$ e $f(b)$.*

Il teorema si può enunciare anche nel modo seguente:

Teorema 5.5 (L'immagine continua di un intervallo è un intervallo)**.** *Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e sia $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora l'immagine $J = f(I)$ di f è un intervallo.*

In breve: *Le funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ trasformano intervalli in intervalli.*

Questo teorema generalizza il Teorema degli Zeri 5.1.

Dimostrazione. Siano $a' = f(a)$ e $b' = f(b)$ due punti di $f(I)$. Sia w un numero tale che $a' < w < b'$. Si deve dimostrare che $w \in f(I)$.

La funzione $g(x) = f(x) - w$ è continua sull'intervallo $[a, b]$ perchè differenza di funzioni continue, inoltre

$$g(a) = f(a) - w = a' - w < 0 \quad \text{e} \quad g(b) = f(b) - w = b' - w > 0 \tag{5.8}$$

Dunque la funzione g soddisfa le ipotesi del Teorema degli Zeri 5.1 sull'intervallo $[a, b]$. Allora esiste un punto $c \in (a, b)$ per il quale $g(c) = f(c) - w = 0$, ossia $f(c) = w$, come si voleva dimostrare. ∎

Osservazione Non si deve pensare che una funzione, definita su un intervallo, che per ogni coppia di punti x_1, x_2 assuma tutti i valori compresi tra $f(x_1)$ e $f(x_2)$ sia necessariamente continua. Un controesempio è fornito dalla funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \tag{5.9}$$

Infatti questa funzione, definita su tutto $\mathbb{R}$, non è continua in 0 (comunque si definisca il suo valore in 0). Eppure, per ogni coppia di punti $x_1 < x_2$ assume tutti i valori compresi tra $f(x_1)$ e $f(x_2)$.

5.4 Continuità della funzione inversa

Il problema che qui si vuole affrontare è il seguente

Se una funzione reale di variabile reale (cioè una funzione $A \xrightarrow{f} B$, con $A, B \subset \mathbb{R}$) è continua e invertibile, la sua funzione inversa è necessariamente continua?

Una funzione invertibile, continua e con inversa continua, si chiama *omeomorfismo*. Quindi il problema si può formulare in questo modo: *Una funzione invertibile e continua è necessariamente un omeomorfismo?*

In generale, la risposta è no.

Ad esempio, si consideri la funzione $A \xrightarrow{f} B$ così definita: il dominio di f è $A = [0,1) \cup [2,3]$, il codominio di f è $B = [0,2]$ e, per ogni x del dominio,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ x-1 & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Questa funzione è continua sul suo dominio A, perché è continua in ogni punto di A. Inoltre, si vede facilmente che è invertibile. Ma la sua inversa $B \xrightarrow{f^{-1}} A$,

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y & \text{se } 0 \leq y < 1 \\ y+1 & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

(il cui dominio è $B = [0,2]$ e il cui codominio è $A = [0,1) \cup [2,3]$) non è continua nel punto 1.

Se però f ha valori reali e il suo dominio è un *intervallo* di $\mathbb{R}$, oppure è un *compatto* di $\mathbb{R}$ (cioè un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ chiuso e limitato), allora la funzione inversa f^{-1} è anch'essa continua.

Come prima cosa si consideri il caso delle funzioni continue, a valori reali, invertibili su un intervallo.

Teorema 5.6 (Continuità della funzione inversa)**.** *Sia f una funzione continua definita su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$, a valori in $\mathbb{R}$. Se la funzione $I \xrightarrow{f} f(I)$ è invertibile, allora la funzione inversa $f(I) \xrightarrow{f^{-1}} I$ è continua.*

Prima di dimostrare il teorema 5.6, vediamo meglio come sono fatte le funzioni che sono continue su un intervallo e invertibili. È interessante notare che devono essere strettamente monotone, cioè crescenti oppure decrescenti:

Lemma 5.1. *Ogni funzione reale f continua su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ e invertibile è strettamente monotona.*

Dimostrazione. Si supponga che f non sia strettamente monotona. Negare che f sia strettamente monotona equivale ad affermare che esistono tre punti x_1, x_2, x_3 in I tali che $x_1 < x_2 < x_3$ e per i quali vale una delle seguenti coppie di disuguaglianze:

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad \text{e} \quad f(x_2) \geq f(x_3)$$

oppure

$$f(x_1) \geq f(x_2) \quad \text{e} \quad f(x_2) \leq f(x_3)$$

Si supponga che si verifichi la prima coppia di disuguaglianze. Non si può avere $f(x_1) = f(x_2)$ e nemmeno $f(x_2) = f(x_3)$, perché altrimenti f non sarebbe iniettiva. Sia h il massimo tra $f(x_1)$ e $f(x_3)$. (Nella figura, $h = f(x_3)$). Poiché f è continua, i valori w che soddisfano $h < w < f(x_2)$ vengono allora assunti dalla funzione f almeno due volte: una nell'intervallo (x_1, x_2) e un'altra nell'intervallo (x_2, x_3). Questo contrasta con il fatto che f è iniettiva. Analogamente si procede nel caso valga la seconda coppia di disuguaglianze. ∎

Qui di seguito si riporta la dimostrazione del teorema dell'inversa continua.

Dimostrazione. (del teorema 5.6). Sia f continua e invertibile su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$. Allora la sua immagine $I' = f(I)$ è un intervallo.

Per il lemma precedente f è monotona; diciamo crescente, per fissare le idee. Quindi anche la funzione inversa $I' \xrightarrow{f^{-1}} I$ sarà crescente. Si vuole dimostrare che f^{-1} è continua in ogni punto di I'. Si fissi dapprima un punto w' che sia interno a I'. Il punto $w = f^{-1}(w')$ deve essere allora interno a I. Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario, ma sufficientemente piccolo perché l'intervallino $I_\varepsilon = (w - \varepsilon, w + \varepsilon)$ sia tutto contenuto in I'.

Poiché f è crescente,

$$w - \varepsilon < w < w + \varepsilon \implies f(w - \varepsilon) < w' < f(w + \varepsilon) \tag{5.10}$$

e quindi l'intervallino $I'_\varepsilon = (f(w - \varepsilon), f(w + \varepsilon))$ è un intorno di w'. Poiché anche la funzione f^{-1} è crescente,

$$f(w - \varepsilon) < y < f(w + \varepsilon) \implies w - \varepsilon < f^{-1}(y) < w + \varepsilon \tag{5.11}$$

Questo significa che ogni punto y dell'intorno $(f(w - \varepsilon), f(w + \varepsilon))$ di w' viene mandato in $I_\varepsilon = (w - \varepsilon, w + \varepsilon)$.

Riassumendo: si è dimostrato che, fissato ad arbitrio un intorno $(w-\varepsilon, w+\varepsilon)$ di $w = f^{-1}(w')$, esiste un intorno $(f(w - \varepsilon), f(w + \varepsilon))$ di w' che viene trasformato da f^{-1} in $(w - \varepsilon, w + \varepsilon)$. Per la definizione stessa di continuità, si conclude che f^{-1} è continua in w'.

Il ragionamento si modifica in modo ovvio nel caso il punto w' sia un estremo di I'. Basterà considerare intorni soltanto sinistri o destri. Si supponga ad esempio che w' sia l'estremo superiore di I'. Allora, poiché f^{-1} è crescente, anche $w = f^{-1}(w')$ è l'estremo superiore dell'intervallo I'. Preso $\varepsilon > 0$ arbitrario, si consideri l'intorno sinistro $(w - \varepsilon, w]$ di w. La funzione f^{-1}, essendo crescente, trasforma l'intorno sinistro $(f(w - \varepsilon), w']$ di w' nell'intorno sinistro $(w - \varepsilon, w]$ di w. Questo prova che f^{-1} è continua in w'. ∎

Esempi. In questi esempi si suppone che siano già conosciute le definizioni delle funzioni $\sin, \cos$ e $\tan$, e che si sappia che sono funzioni continue.

1) La funzione

$$[-\pi/2, \pi/2] \xrightarrow{\sin} [-1, 1]$$

è strettamente crescente (quindi iniettiva) e suriettiva. Dunque è invertibile. Inoltre la funzione sin è continua. Quindi, per il teorema sulla continuità della funzione inversa, anche la sua inversa

$$[-1, 1] \xrightarrow{\arcsin} [-\pi/2, \pi/2]$$

detta *arcoseno*, è continua.

2) La funzione
$$[0, \pi] \xrightarrow{\cos} [-1, 1]$$
è strettamente decrescente (quindi iniettiva) e suriettiva. Dunque è invertibile. Per il teorema sulla continuità della funzione inversa, la sua inversa
$$[-1, 1] \xrightarrow{\arcsin} [-\pi/2, \pi/2]$$
detta *arcoseno*, è continua.

3) In modo analogo, la funzione
$$(-\pi/2, \pi/2) \xrightarrow{\tan} \mathbb{R}$$
è invertibile e continua. Quindi la funzione inversa
$$\mathbb{R} \xrightarrow{\arctan} (-\pi/2, \pi/2)$$
(detta *arcotangente*) è continua.

4) La funzione elevamento a quadrato
$$[0, +\infty) \xrightarrow{(-)^2} [0, +\infty), \qquad f(x) = x^2$$
è continua su un intervallo e invertibile. Dunque, per il teorema sulla continuità della funzione inversa, la sua inversa, che è la funzione radice quadrata
$$[0, +\infty) \xrightarrow{\sqrt{(-)}} [0, +\infty), \qquad g(x) = \sqrt{x}$$
è continua.

Nello stesso modo si dimostra la continuità di tutte le funzioni $\sqrt[n]{(-)}$ (radici n-esime).

5.5 Teorema di Weierstrass

Ora enunciamo e dimostriamo il teorema di Weierstrass in un caso particolare: quello di funzioni reali definite su un intervallo $[a, b]$ chiuso e limitato (intervallo compatto). In realtà, il teorema di Weierstrass vale, più in generale, per funzioni continue, a valori reali, definite su un qualunque compatto (chiuso e limitato).

Teorema 5.7. *Una funzione $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ continua su un intervallo compatto (cioè chiuso e limitato) $I = [a, b]$ è limitata. Inoltre esistono nell'intervallo I un punto nel quale la funzione assume il suo valore massimo e un punto nel quale la funzione assume il suo valore minimo.*

In termini più espliciti, la tesi afferma che esistono in $[a, b]$ (almeno) un punto p e (almeno) un punto q per i quali si ha, per ogni $x \in [a, b]$,
$$f(p) \leq f(x) \tag{5.12}$$

$$f(x) \leq f(q) \tag{5.13}$$

Si osservi anzitutto che se f fosse definita e continua su un intervallo non chiuso o su un intervallo non limitato, la tesi non sarebbe più vera. Ad esempio, si consideri la funzione $f(x) = 1/x$ sull'intervallo non chiuso $(0, 1]$ o la funzione $f(x) = x^2$ sull'intervallo non limitato $[0, +\infty)$.

Dimostrazione. (Teorema di Weierstrass)[3]. Qui si dimostra che f assume in $[a, b]$ un valore massimo (in modo analogo si procede per il minimo). Si denoti con L l'estremo superiore di f su $[a, b]$:

$$L = \sup_{[a,b]} f = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$

A priori, non si può escludere che L sia $+\infty$; ma la dimostrazione ci dirà che L è un numero reale - cioè che f è superiormente limitata - e che esiste un punto $q \in [a, b]$ nel quale $f(q) = L$. Si divida l'intervallo $[a, b]$ in due intervalli mediante il punto medio c. È ovvio che in almeno uno dei due intervalli $[a, c]$ e $[c, b]$ l'estremo superiore di f deve essere ancora L. (Per dimostrarlo, si ponga

$$L_1 = \sup_{[a,c]} f \qquad \text{e} \qquad L_2 = \sup_{[c,b]} f$$

Si ha $L_1 \leq L$ e $L_2 \leq L$. Si supponga che per assurdo $L_1 < L$ e $L_2 < L$. Da

$$f(x) \leq L_1 \quad \text{per ogni } x \in [a, c] \qquad\qquad f(x) \leq L_2 \quad \text{per ogni } x \in [c, b]$$

si ricava che, per ogni $x \in [a, b]$,

$$f(x) \leq \max\{L_1, L_2\} < L$$

contro l'ipotesi che L sia la *minima* limitazione superiore). Si indichi con $I_1 = [a_1, b_1]$ quello dei due intervalli in cui l'estremo superiore di f è uguale a L (o uno qualunque dei due, se entrambi soddisfano questa condizione) e si iteri il procedimento. Si ottiene in questo modo una successione $I_n = [a_n, b_n]$ di intervalli compatti inscatolati, su ciascuno dei quali l'estremo superiore di f è L, e le cui ampiezze $(b - a)/2^n$ tendono a zero. Per il teorema degli intervalli compatti inscatolati, la successione di intervalli $I_n = [a_n, b_n]$ definisce un numero reale q che appartiene all'intervallo $[a, b]$ (l'unico punto che appartiene a tutti gli intervallini I_n). Si tratta ora di dimostrare che nel punto q la funzione f assume il suo valore massimo.

Poiché f è continua in q, fissato un $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per tutti gli $x \in [q-\delta, q+\delta]$ si ha $|f(x) - f(q)| < \varepsilon$. Di qui si ricava, in particolare, che

$$\forall x \in [q - \delta, q + \delta] \qquad f(x) < f(q) + \varepsilon \tag{5.14}$$

Ma poiché gli intervallini $[a_n, b_n]$ sono contenuti in $[q - \delta, q + \delta]$ per tutti gli n sufficientemente grandi e su ciascuno di essi l'estremo superiore di f vale L, dalla disuguaglianza 5.14 segue

$$L \leq f(q) + \varepsilon \tag{5.15}$$

Del resto ovviamente si ha

$$f(q) \leq L \tag{5.16}$$

[3]Lo studio di questa dimostrazione è facoltativo.

(perché L è il sup di f) e quindi

$$f(q) \leq L \leq f(q) + \varepsilon \tag{5.17}$$

Poiché ε è arbitrario, si ricava $L = f(q)$, e con questo la dimostrazione è conclusa. ∎

Osservazione. Questa dimostrazione può sembrare molto simile a quella del teorema degli zeri di una funzione continua (metodo di bisezione). Ma c'è una sostanziale differenza. La dimostrazione con il metodo della bisezione del teorema di Weierstrass *non è costruttiva*, ma è *puramente esistenziale* cioè non fornisce un *algoritmo* per trovare un punto di massimo. Infatti non abbiamo un algoritmo per decidere (a ogni passaggio) quale dei due intervallini scegliere, cioè non sappiamo come decidere su quale dei due intervallini il sup di f coincide con il sup di f sull'intero $[a, b]$.

6 Esercizi

6.1 Funzioni e limiti

Esercizio 6.1. *Tracciare i grafici delle seguenti funzioni*

1) $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$ *con* $a, b \in \mathbb{R}$

2) $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c$ *con* $a, b, c \in \mathbb{R}$

3) $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = x^3$

4) $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt[3]{x}$

5) $\mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$

6) $\mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x^2}$

7) $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{>0},\ f(x) = a^x$ *con* $a > 0$,

8) $\mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = \log_a x$ *con* $a > 0$,

Esercizio 6.2. *Scegliere dominio e codominio in modo tale che* $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$ *risultino funzioni invertibili. Tracciare i grafici di tali funzioni e delle relative inverse.*

Esercizio 6.3. *Una funzione* $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *si dice* pari *se per ogni* $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = f(-x)$, *mentre* $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *si dice* dispari *se per ogni* $x \in \mathbb{R}$ $-f(x) = f(-x)$. *Dimostrare che*

1. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *è pari e* $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ *è pari allora* $\mathbb{R} \xrightarrow{fg} \mathbb{R}$ *è pari.*
2. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *è pari e* $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ *è dispari allora* $\mathbb{R} \xrightarrow{fg} \mathbb{R}$ *è dispari.*
3. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *è dispari e* $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ *è dispari allora* $\mathbb{R} \xrightarrow{fg} \mathbb{R}$ *è pari.*

(Qui, con fg *si intende la funzione prodotto di* f *per* g*.)*

Esercizio 6.4. *Si considerino le funzioni*

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = |1 - x|$$
$$\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R},\ g(x) = 1 - |x|$$

a) Disegnare i grafici di f *e* g*.*

b) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione $|1 - x| = 1 - |x|$

Esercizio 6.5. *Se è noto il grafico di* $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $y = f(x)$ *qual è il grafico di* $y = |f(x)|$ *e di* $y = f(|x|)$*?*

Esercizio 6.6. *Decidere se le seguenti funzioni sono iniettive, suriettive, invertibili. Se sono invertibili, si scriva la funzione inversa. Di ognuna delle funzioni, si disegni il grafico.*

$$
\begin{array}{lll}
1) & \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} & f(x) = 2x - 3 \\
2) & \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} & g(x) = x^2 \\
3) & \mathbb{R}_{\geq 0} \xrightarrow{h} \mathbb{R}_{\geq 0} & h(x) = x^2 \\
4) & \mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{k} \mathbb{R}_{>0} & k(x) = \dfrac{1}{x} \\
5) & \mathbb{R} \xrightarrow{l} \mathbb{R} & l(x) = x^3 \\
6) & \mathbb{R} \xrightarrow{\exp_2} \mathbb{R}_{>0} & \exp_2(x) = 2^x \\
7) & \mathbb{R} \xrightarrow{\exp_2} \mathbb{R} & \exp_2(x) = 2^x \\
8) & \mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{\ln} \mathbb{R} & \ln x = \text{logaritmo in base } e \text{ di } x
\end{array}
$$

Esercizio 6.7. *Trovare il dominio massimale della funzione* $f(x) = \log_7(2x - \sqrt{x^2 - 1})$.

Esercizio 6.8. *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \sqrt{1 - x} + \sqrt{x + 1}$$

(a) *Determinare il dominio* $D(f)$ *di* f.

(b) f *è pari? è dispari? Spiegare.*

(c) f *è iniettiva?* f *è invertibile?*

Esercizio 6.9. *Si consideri la funzione* $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = mx + q$ *con* m *e* q *numeri reali fissati a piacere.*

1. *Trovare per quali valori di* m *e* q *la funzione* f *è iniettiva (suriettiva).*
2. *Trovare, al variare di* m *e* q *,i punti fissi della funzione* f.

Esercizio 6.10. *Si considerino le funzioni*

$$
\begin{array}{lll}
1) & \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} & f(x) = 2x - 3 \\
2) & \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} & g(x) = 2^x
\end{array}
$$

Trovare $g \circ f$, $f \circ g$, $\mathrm{Im}\ (g \circ f)$, $\mathrm{Im}\ (f \circ g)$.

Esercizio 6.11. *Si consideri la funzione* $h(x) = 2^{2x} - 2^x - 2$

(a) *Esprimere la funzione* h *come composizione di due altre funzioni* f *e* g*, una delle quali è* $f(x) = 2^x$*. In altre parole, posto* $f(x) = 2^x$*, determinare una funzione* $g(x)$ *in modo che risulti* $h(x) = (g \circ f)(x)$*.*

(b) *Determinare il dominio* $D(h)$ *di* h *e l'immagine* $\mathrm{Im}\, h$*.*

Esercizio 6.12. *Siano* $A \xrightarrow{f} B$ *e* $B \xrightarrow{g} C$ *funzioni invertibili. Allora* $A \xrightarrow{g \circ f} C$ *è invertibile e*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Esercizio 6.13. *Sia* $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$*,* $f(x) = ax + b$ *per ogni* x *in* $\mathbb{R}$*.*

1. *Determinare i valori di* a *e* b *per i quali* $f \circ f = f$*.*
2. *Determinare i valori di* a *e* b *per i quali* $f \circ f = 1_{\mathbb{R}}$ *(l'identità di* $\mathbb{R}$*).*
3. *Determinare i valori di* a *e* b *per i quali* f *è invertibile.*
4. *Studiare, al variare di* a *e* b*, l'esistenza di punti fissi di* f*, cioè di* $x \in \mathbb{R}$ *per i quali* $f(x) = x$*. (Dare anche un'interpretazione geometrica).*

Esercizio 6.14. *Rispondere ai seguenti quesiti:*

1. *Trovare gli eventuali valori di* m, q *per i quali la funzione* $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$*,* $f(x) = mx + q$ *è pari.*
2. *Trovare gli eventuali valori di* m, q *per i quali la funzione* $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$*,* $f(x) = mx + q$ *è dispari.*
3. *Supponiamo che* $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *sia pari e che* $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ *sia dispari. Cosa si può dire delle funzioni composte* $f \circ g, g \circ f, f \circ f, g \circ g$*? Sono pari, dispari, né pari né dispari? Motivare le risposte.*

Esercizio 6.15. *Trovare - se esistono - i seguenti limiti:*

1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^2}{3x^2-x-1}$	2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+100}{x^2+1}$	3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x}$
4) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sin x}$	5) $\displaystyle\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}}$	6) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{3x+1}$
7) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{7x}$	8) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$	9) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}$
10) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+2x}-x}$	11) $\displaystyle\lim_{x\to+2} \frac{\lvert x-2\rvert}{(x^2+1)(x-2)}$	12) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x^3-3x}{x^4+5x}$

Esercizio 6.16. *Tracciare i grafici locali della funzione*

$$\mathbb{R} \setminus \{1,4\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x-4}{x^2-5x+4}$$

in un intorno di $x = 1$ *e in un intorno di* $x = 4$.

Esercizio 6.17. *Trovare i limiti della funzione*

$$\mathbb{R} \setminus \{1\} \xrightarrow{g} \mathbb{R}, \quad g(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$$

agli estremi del proprio dominio, vale a dire, per $x \to -\infty, x \to 1^-, x \to 1^+, x \to +\infty$.

Esercizio 6.18. *Tracciare un grafico qualitativo della funzione*

$$\mathbb{R} \setminus \{1,4\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-5x+4}$$

.

6.2 Funzioni continue

Esercizio 6.19. *Si consideri la funzione* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\qquad f(x) = \begin{cases} 2x^3 & se \;\; x \leq 1 \\ ax + b & se \;\; x > 1 \end{cases}$

Quale relazione deve sussistere tra i parametri reali a *e* b *affinchè la funzione risulti continua in* $\mathbb{R}$*?*

Esercizio 6.20. *Si consideri la funzione* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\qquad g(t) = \begin{cases} e^t & se \;\; t \geq 2 \\ \frac{1}{3}t + k & se \;\; t < 2 \end{cases}$

Quale valore deve assumere il parametro reale k *affinché la funzione risulti continua in* $\mathbb{R}$*?*

Esercizio 6.21. *Si consideri la funzione* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\qquad f(x) = \begin{cases} \cos x & se \;\; x \geq 0 \\ ax - 3 & se \;\; x < 0 \end{cases}$

Determinare per quali valori del parametro reale a *la funzione risulta continua in* $\mathbb{R}$.

Esercizio 6.22. *Si consideri la funzione* $h : [-2, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$h(x) = \begin{cases} x^2 + 2ax + a & se \quad x > 0 \\ \sqrt{x+2} & se \quad -2 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

Determinare per quali valori del parametro reale a *la funzione risulta continua in* $[-2, +\infty)$.

Esercizio 6.23. *Si consideri la funzione* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\qquad f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & se \;\; x \neq 0 \\ a & se \;\; x = 0 \end{cases}$

Determinare per quali valori del parametro reale a *la funzione risulta continua in* 0.

Esercizio 6.24. *Tracciare un grafico qualitativo della funzione* $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

per ogni x *in* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Esercizio 6.25. *Dimostrare che ogni polinomio a coefficienti reali di terzo grado* $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, $a_3 \neq 0$, *ha almeno una radice reale, cioè esiste almeno un numero reale* x_0 *per il quale* $P(x_0) = 0$.

Esercizio 6.26. *Dimostrare che ogni polinomio a coefficienti reali di grado dispari* $P(x) = a_{2m+1}x^{2m+1} + a_{2m}x^{2m} + ... + a_1x + a_0$, $a_{2m+1} \neq 0$, *ha almeno una radice reale, cioè esiste almeno un numero reale* x_0 *per il quale* $P(x_0) = 0$.

Esercizio 6.27. *Dimostrare che l'equazione* $x^3 + \frac{1}{3}x - 1 = 0$ *ha un'unica soluzione reale, che appartiene all'intervallo* $(0, 1)$.

Esercizio 6.28. *Dimostrare che il polinomio* $p(x) = 4x^3 + x^2$ *ha un punto fisso nell'intervallo* $[-1, 1]$.

Esercizio 6.29. *Dimostrare che ogni applicazione continua* $[0, 1] \xrightarrow{f} [0, 1]$ *ha almeno un punto fisso.*

Esercizio 6.30. *Sia* $A \xrightarrow{f} B$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$, *una funzione crescente e suriettiva. Dimostrare che* f *è invertibile e* f^{-1} *è anch'essa crescente.*

Esercizio 6.31 (Vero o falso?)**.** *Sia* $A \xrightarrow{f} B$, *una funzione,* $A, B \subseteq \mathbb{R}$. *Se* f *è invertibile, allora* f *è monotona.*

Esercizio 6.32 (Vero o falso?)**.** *Sia* I *un intervallo e* $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione. Se* f *è continua, allora* $f(I)$ *è un intervallo.*

Esercizio 6.33 (Vero o falso?)**.** *Sia* I *un intervallo e* $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione. Se* $f(I)$ *è un intervallo, allora* f *è continua.*

Esercizio 6.34. (*) *Assumendo che la temperatura all'equatore sia funzione continua della longitudine, si dimostri che:*

a) esistono infinite coppie di punti all'equatore nei quali la temperatura è la stessa;

b) esiste almeno una coppia di punti antipodali all'equatore nei quali la temperatura è la stessa.

6.3 Suggerimenti e risposte.

7 Suggerimenti e risposte.

Esercizio 6.7 Il dominio di f coincide con le soluzioni reali del sistema

$$\begin{cases} 2x - \sqrt{x^2-1} & > 0 \\ x^2 - 1 & \geq 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 1\}$. Quindi il dominio di f è $D(f) = [1, +\infty)$.

Esercizio 6.8

(a) $D(f) = [-1, 1]$

(b) È facile verificare che $f(-x) = f(x)$, per ogni $x \in D(f)$. Quindi f è pari, il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y.

(c) f non è iniettiva perchè f è pari. Pertanto, f non è invertibile.

Esercizio 6.11

(a) La funzione richiesta è $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - x - 2$

(b) I domini di f e di g sono $D(f) = D(g) = \mathbb{R}$ mentre Im $f = (0, +\infty)$ e Im $g = [-\frac{9}{4}, +\infty)$. Segue che il dominio $D(h)$ di h è $\mathbb{R}$ e Im $h = [-\frac{9}{4}, +\infty)$.

Esercizio 6.10 $(g \circ f)(x) = 2^{2x-3}$; $(f \circ g)(x) = 2 \cdot 2^x - 3$; Im $(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$; Im $(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > -3\}$.

Esercizio 6.12 Per definizione di inversa, per dimostrare che $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ si deve provare che

$$(g \circ f)(f^{-1} \circ g^{-1}) = 1_C$$

e

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(g \circ f) = 1_A.$$

Ora

$$\begin{aligned} (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} \\ &= g \circ g^{-1} \\ &= 1_C. \end{aligned}$$

Analogamente si prova $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = 1_A$.

Esercizio 6.13 1) $(a = 0, \forall b \in \mathbb{R})$ o $(a = 1, b = 0)$. 2) $(a = -1, \forall b \in \mathbb{R})$ o $(a = 1, b = 0)$. 3) $a \neq 0$, 4)$a \neq 1$.

Esercizio 6.14 1) $m = 0$, 2) $q = 0$, 3) $f \circ g$ è pari, $g \circ f$ è pari, $f \circ f$ è pari, $g \circ g$ è dispari.

Esercizio 6.15 1) $-1/3$. 2) 0. 3) 0. 4) $+\infty$. 5) 0. 6) $1/3$. 7) $3/7$. 8) $\frac{1}{2}$. 9) 2. 10) 1. 11) Non ha limite. 12) $-\frac{3}{5}$.

Esercizio 6.16 $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 4^\pm} f(x) = \dfrac{1}{3}$.

Esercizio 6.17 $\lim_{x\to \pm\infty} g(x) = 1$, $\lim_{x\to 1^-} g(x) = 0$, $\lim_{x\to 1^+} g(x) = +\infty$

Esercizio 6.18

Esercizio 6.19 $a + b = 2$.

Esercizio 6.20 $k = e^2 - \frac{2}{3}$.

Esercizio 6.21 Per ogni $a \in \mathbb{R}$, f è discontinua in $x = 0$.

Esercizio 6.22 $a = \sqrt{2}$.

Esercizio 6.23 $a = 0$.

Esercizio 6.24

Esercizio 6.25 Se $a_3 > 0$, allora $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$, mentre $\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$. Ora si usi il teorema degli zeri.

Esercizio 6.26 Vedere l'esercizio precedente.

Esercizio 6.27 Posto $P(x) = x^3 + \frac{1}{3}x - 1$, si valuti $P(0)$ e $P(1)$, e si ricorra al teorema degli zeri. Per dimostrare che esiste al più una soluzione, si osservi che la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + \frac{1}{3}x - 1$ è crescente (in quanto somma di funzioni crescenti), e quindi iniettiva.

Esercizio 6.30 Se f è crescente, allora è iniettiva. (Infatti, siano $x, x' \in A$, $x \neq x'$, diciamo $x < x'$. Se f è crescente, si ha $f(x) < f(x')$, $f(x) \neq f(x')$ e quindi f è iniettiva). Siccome per ipotesi è anche suriettiva, f è invertibile (o bigettiva). Dimostriamo che f^{-1} è crescente. Siano $y, y' \in B$, $y < y'$ e poniamo $x = f^{-1}(y)$, $x' = f^{-1}(y')$. Si deve avere $x < x'$, perché se fosse $x' < x$, poiché f è crescente, si avrebbe $f(x') < f(x)$, ossia $y' < y$, contro l'ipotesi. (Non può essere $x = x'$, perché f^{-1} è iniettiva).

Esercizio 6.31 Falso. La funzione $\mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

è invertibile, ma non monotona.

Esercizio 6.32 Vero. Si è visto che è una formulazione equivalente al teorema degli zeri di una funzione continua su un intervallo.

Esercizio 6.33 Falso. Controesempio:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x < 1 \\ x - 2 & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Esercizio 6.34 a) Sia $[0, 2\pi] \xrightarrow{T} \mathbb{R}$ la funzione che esprime la temperatura all'equatore. T ha per dominio un intervallo chiuso e limitato, è continua nel suo dominio (per ipotesi) e $T(0) = T(2\pi)$. T ha massimo e minimo (teorema di Weierstrass) e assume tutti i valori tra il valore massimo e quello minimo. Esistono pertanto infinite coppie di punti con la stessa temperatura (per convimcersene disegnare un possibile grafico di T).

b) Si consideri la funzione $[0, 2\pi] \xrightarrow{\overline{T}} \mathbb{R}$, $\overline{T}(x) = T(x) - T(x+\pi)$. Si ha $\overline{T}(0) = T(0) - T(\pi) = T(2\pi) - T(\pi) = -\overline{T}(\pi)$. Pertanto, se $\overline{T}(0) = 0$ si ha $T(0) = T(\pi)$ e quindi $(0, \pi)$ costituisce una coppia di punti antipodali con la stessa temperatura. Se invece $\overline{T}(0) \neq 0$, per il teorema degli zeri esiste $\alpha \in (0, \pi)$ in cui $\overline{T}(\alpha) = 0$, cioè $T(\alpha) - T(\alpha + \pi) = 0$. ∎