Piccole oscillazioni.

Mauro Saita

e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Novembre 2013.[1]

1 Equazione delle piccole oscillazioni

Si supponga che su di una massa m si eserciti una forza, prodotta ad esempio da una molla, per effetto della quale la massa m oscilla lungo una retta orizzontale. Si scelga tale retta (orientata verso destra, per esempio) come asse delle x e si fissi come punto origine il punto di equilibrio, cioè il punto nel quale la massa resta ferma. Non si considera la forza di gravità, che è bilanciata dalla reazione vincolare esercitata dal piano su cui si muove la massa e si trascurano gli attriti.

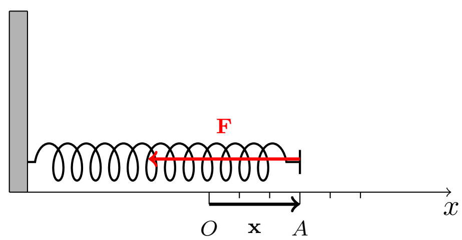

Figura 1: La molla è stata allungata del vettore $\mathbf{x}$ da O (posizione di riposo) ad A.

Si faccia l'ipotesi che la forza sia proporzionale allo spostamento x della massa dalla posizione di equilibrio[2]:

$$F = -kx \qquad \textit{(Legge di Hooke)} \tag{1.1}$$

L'interpretazione del segno meno è la seguente: se si spinge la massa verso destra, la forza di richiamo F è diretta verso sinistra, mentre se si spinge verso sinistra, la forza F è diretta verso destra. La costante k è una caratteristica della molla. Sotto l'effetto della forza F, la massa si mette ad oscillare. All'istante t la massa ha la posizione $x(t)$, la velocità $v(t)$ e l'accelerazione $a(t)$:

$$\text{Posizione}: \quad x(t) \tag{1.2}$$

$$\text{Velocità}: \quad v(t) \tag{1.3}$$

$$\text{Accelerazione}: \quad a(t) \tag{1.4}$$

Applicando la legge di Newton $F = ma$ si ha

$$ma = -kx \qquad \textit{(Equazione delle piccole oscillazioni)} \tag{1.5}$$

[1] Nome file: 'piccole-oscillazioni-2013.tex'

[2] In molti casi la forza che riporta un sistema al suo punto di equilibrio si può considerare proporzionale allo spostamento dalla posizione di equilibrio, cioè del tipo $F = -kx$, se lo spostamento x è piccolo. Essenzialmente per questo motivo: la forza è nulla nel punto di equilibrio e nell'infinitesimo ogni funzione è lineare.

In questa equazione x e a sono funzioni del tempo. In ogni istante di tempo t si sa (come conseguenza della legge di Hooke $F = -kx$ e della legge della dinamica $F = ma$) che la funzione $x = x(t)$, che descrive il movimento della massa m, e l'accelerazione $a(t)$ sono legate tra loro dalla uguaglianza (1.5).

Non si guadagna niente a tenere tante costanti; quindi si supponga $\dfrac{k}{m} = 1$. (Ci si può sempre ricondurre al caso $\frac{k}{m} = 1$, pur di riscalare i tempi). L'equazione da risolvere è allora[3]

$$a(t) = -x(t) \tag{1.6}$$

Il significato dell'equazione (1.6) è il seguente. Si supponga che a un istante t l'oggetto che oscilla abbia una posizione $x(t)$ e una velocità $v(t)$. Qual è la posizione e qual è la velocità a un istante di tempo di poco posteriore $t + \varepsilon$? Se si risponde a questa domanda, il problema di determinare il moto è, in linea di principio, risolto. Infatti, partendo da una coppia di condizioni iniziali, costituite da una posizione $x(t)$ e da una velocità $v(t)$, si calcola la posizione $x(t + \varepsilon)$ e la velocità $v(t + \varepsilon)$ al primo istante successivo $t + \varepsilon$; quindi si calcola posizione e velocità all'istante successivo $t + 2\varepsilon$, all'istante ancora successivo $t + 3\varepsilon$ e così via. In questo modo si sviluppa gradualmente il moto.

In termini più specifici, si supponga che all'istante $t = 0$ si abbia $x(0) = 1$ e $v(0) = 0$, cioè si porti la massa nel punto di ascissa 1 e la si tenga ferma in questa posizione ($x(0) = 1$ e $v(0) = 0$). Poi la si lasci andare; sotto l'effetto della forza, comincerà a oscillare. Ad ogni istante t, se ε è molto piccolo, si può esprimere la posizione all'istante $t + \varepsilon$ in funzione della posizione all'istante t, della velocità $v(t)$ e di ε nel modo seguente:

$$x(t + \varepsilon) = x(t) + \varepsilon v(t) \tag{1.7}$$

In realtà l'uguaglianza (1.7) non è una vera uguaglianza, ma solo un'ottima approssimazione. Più piccolo è ε, migliore è l'approssimazione. Ma la 1.7 può essere molto utile anche se ε non è una quantità piccola in modo trascurabile. Cosa si può dire della velocità all'istante $t + \varepsilon$? Per ottenere la velocità all'istante $t + \varepsilon$, si deve sapere come la velocità varia, cioè si deve conoscere l'accelerazione $a(t)$,

$$v(t + \varepsilon) = v(t) + \varepsilon a(t) \tag{1.8}$$

E come fa a conoscere l'accelerazione? È qui che entra in gioco la legge fondamentale della dinamica $F = ma$, che nel nostro caso è $a(t) = -x(t)$. Questa legge ci dice che l'accelerazione $a(t)$ è uguale a $-x(t)$.

Dunque si ha:

$$v(t + \varepsilon) = v(t) - \varepsilon x(t) \tag{1.9}$$

L'equazione (1.8) è pura cinematica; dice che la velocità cambia e qual è il legame tra velocità e accelerazione. Invece l'equazione 1.9 è *dinamica*, perché lega l'accelerazione alla forza. Precisamente dice che, per questo particolare problema, al posto di $a(t)$ si può sostituire $-x(t)$.

[3] Un'equazione di questo tipo, che esprime un legame tra la funzione 'posizione' $x(t)$ e l'accelerazione $a(t)$ si chiama *equazione differenziale*. In particolare la (1.6) è un'equazione differenziale del *secondo ordine*.

Pertanto, se si conosce sia x che v a un dato istante di tempo, allora attraverso la legge della dinamica si conosce l'accelerazione, che ci dice qual è la nuova velocità, e allora siamo in grado di trovare la nuova posizione e così via. È così che funziona il meccanismo. La velocità varia un pochino a causa della forza, la posizione varia un pochino a causa della velocità.

1.1 Soluzione numerica

Ora si risolva realmente il problema. Si scelga $\varepsilon = 0.10$ sec. Se partiamo dal valore iniziale $x(0) = 1.00$, cos'è $x(0.10)$? È la vecchia posizione $x(0)$ più il prodotto di 0.10 per la velocità all'istante 0, che è nulla. Quindi $x(0.10)$ è ancora 1.00. La nuova velocità all'istante 0.10 sarà la vecchia velocità $v(0)$ più ε volte l'accelerazione. L'accelerazione è $a(0) = -x(0) = -1.00$. Dunque

$$v(0.1) = 0.00 - 0.10 \times 1.00 = -0.10 \tag{1.10}$$

All'istante 0.20 sec.

$$\begin{aligned} x(0.20) &= x(0.10) + \varepsilon v(0.10) && (1.11) \\ &= 1.00 - 0.10 \times 0.10 = 0.99 && (1.12) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} v(0.20) &= x(v.10) + \varepsilon a(0.10) && (1.13) \\ &= -0.10 - 0.10 \times 1.00 = -0.20 && (1.14) \end{aligned}$$

Continuando in questo modo, si può ricostruire il moto. Per gli scopi pratici, ci sono dei piccoli trucchi che consentono di aumentare la precisione. Qui se ne descrive uno. La nuova posizione è la vecchia posizione più l'intervallo di tempo ε moltiplicato per la velocità calcolata all'inizio dell'intervallo di tempo. Il miglioramento consiste nell'usare la velocità *al punto medio dell'intervallo.* Le stesse considerazioni si applicano anche alla velocità : per calcolare i cambiamenti di velocità, possiamo usare l'accelerazione all'istante intermedio tra i due istanti nei quali la velocità deve essere calcolata. Vale a dire, possiamo usare le equazioni:

$$\begin{aligned} x(t+\varepsilon) &= x(t) + \varepsilon v(t + \frac{\varepsilon}{2}) && (1.15) \\ v(t + \frac{\varepsilon}{2}) &= v(t - \frac{\varepsilon}{2}) + \varepsilon a(t) && (1.16) \\ a(t) &= -x(t) && (1.17) \end{aligned}$$

Resta un problema per le condizioni iniziali: per cominciare i nostri calcoli, si aggiunga l'equazione

$$v(\frac{\varepsilon}{2}) = v(0) + \frac{\varepsilon}{2} a(0) \tag{1.18}$$

Nella tabella seguente sono riportati i risultati dei conti. Le velocità sono riportate su linee inframezzate, perché sono calcolate negli istanti intermedi.

Soluzione numerica di $x'' = -x$, $x(0) = 1$, $v(0) = 0$.

(*La Fisica di Feynman. The Feynman Lectures on Physics*, vol. I, Parte 1, capitolo 9).

$Tempo : t$	$Posizione : x$	$Velocità : v$	$Accelerazione : a$
0.0	1.000	0.000	−1.000
		−0.050	
0.1	0.995		−0.995
		−0.150	
0.2	0.980		−0.980
		−0.248	
0.3	0.955		−0.955
		−0.343	
0.4	0.921		−0.921
		−0.435	
0.5	0.877		−0.877
		−0.523	
0.6	0.825		−0.825
		−0.605	
0.7	0.764		−0.764
		−0.682	
0.8	0.696		−0.696
		−0.751	
0.9	0.621		−0.621
		−0.814	
1.0	0.540		−0.540
		−0.868	
1.1	0.453		−0.453
		−0.913	
1.2	0.362		−0.362
		−0.949	
1.3	0.267		−0.267
		−0.976	
1.4	0.169		−0.169
		−0.993	
1.5	0.070		−0.070
		−1.000	
1.6	−0.030		+0.030

Questa tabella dà un'ottima idea di come si sviluppa il moto: parte con velocità zero, dapprima acquista un po' di velocità (negativa) e perde un po' in posizione. Proseguendo, la velocità aumenta (in valore assoluto), ma il corpo acquista velocità sempre più lentamente (cioè l'accelerazione diminuisce). Dopo poco più di 1.5 secondi, il corpo che oscilla passa per la posizione zero con velocità massima (in valore assoluto) uguale a -1 e poco dopo l'accelerazione diventa positiva e il modulo della velocità diminuisce.

Se si riportano i valori trovati sul piano (t, x) e si fa un confronto con il grafico di $x = \cos t$, si vede che c'è un accordo entro le tre cifre significative che abbiamo utilizzato per il nostro calcolo. In seguito si vedrà (mediante verifica diretta) che $x = \cos t$ è l'equazione del moto, vale a dire è la soluzione esatta dell'equazione $a(t) = -x(t)$, con le condizioni iniziali $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, ma è notevole che un calcolo così facile dia risultati così precisi.