Note introduttive sulla teoria della relatività ristretta

Mauro Saita

e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Versione provvisoria, gennaio 2019.[1]

Indice

1 Tempo e simultaneità **2**

1.1 Che cosa significa "il treno arriva alle sette"? 3

1.2 La relatività della simultaneità. Il futuro può precedere il passato 3

2 Gli assiomi della teoria della relatività speciale **5**

3 Trasformazioni di Lorentz **6**

3.1 Osservazioni sul fattore γ e sulla non contemporaneità degli eventi 7

3.2 Come si comportano aste rigide e orologi in movimento 10

3.3 Contrazione delle lunghezze. 10

3.4 Dilatazione dei tempi. 11

3.5 Decadimento del muone 12

3.6 Teorema di addizione delle velocità 14

4 Definizioni e risultati generali della meccanica relativistica **17**

4.1 Massa relativistica 17

4.2 Quantità di moto 17

4.3 Energia 17

5 Tutto è relativo? **19**

6 Appendice **20**

6.1 Deduzione delle trasformazioni di Lorentz 20

Queste note hanno lo scopo di integrare il libro di testo e non di sostituirlo. Le parti scritte in carattere enfatizzato sono citazioni tratte da

[1] A. Einstein, *Elettrodinamica dei corpi in movimento.* 1905. (Reperibile in rete).

[2] A. Einstein, *Relatività: esposizione divulgativa.* Universale Scientifica Boringhieri, 1980. (Titolo originale: A. Einstein, *Relatività.* Dicembre 1916).

[1]Nome file: relativita_speciale_2019.tex

1 Tempo e simultaneità

Avvicinandosi per la prima volta alla teoria della relatività (speciale) ci si deve necessariamente interrogare su cosa sia il "tempo" e avviare una profonda riflessione.

Definizione di simultaneità

Einstein afferma[2]: *"tutte le affermazioni riguardanti il tempo sono sempre asserzioni su eventi simultanei"*. Pertanto, come prima cosa, occorre dare una definizione adeguata di "simultaneità".

L'esempio dei fulmini.[3]

Si pensi a una linea ferroviaria rettilinea e a due fulmini che colpiscono le rotaie in due punti A e B, molto distanti tra loro.

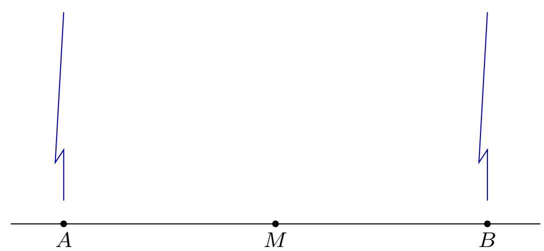

Figura 1

L'affermazione

"i fulmini sono caduti simultaneamente"

che cosa significa veramente? Da un'attenta analisi della situazione ci si rende conto che è necessaria una definizione precisa di *simultaneità*, cioè occorre fornire un metodo sperimentale per mezzo del quale decidere se i due fulmini si sono abbattuti simultaneamente oppure no. Un modo per farlo è questo: si misura la lunghezza del segmento AB; si pone un osservatore nel punto medio M di tale intervallo e lo si munisce di due specchi inclinati di 90°. Si dice, infine, che i due fulmini si sono abbattuti simultaneamente se l'osservatore posto in M percepisce i bagliori dei fulmini nel medesimo istante.

Questa definizione può essere ritenuta soddisfacente se si accetta l'idea che la luce viaggi lungo l'intervallo da A a M con la stessa velocità con cui viaggia lungo l'intervallo che va da B a M.

Definizione di tempo

Una definizione precisa di simultaneità permette un'adeguata definizione di "tempo".

[2] [1], pag 4.
[3] [2], pg 58-61

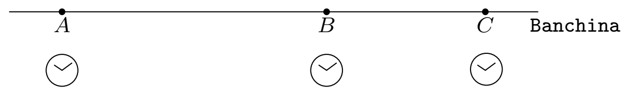

Figura 2

In tre punti distinti della linea ferroviaria, diciamo A, B, C , si pongono tre orologi identici (di medesima costruzione) e si regolano le lancette in modo tale che i tre orologi risultino sincroni (ciò può essere fatto ricorrendo alla precedente definizione di simultaneità). Per "tempo" di un evento si deve intendere la posizione delle lancette dell'orologio che si trova nelle immediate vicinanze dell'evento.

1.1 Che cosa significa "il treno arriva alle sette"?

La frase: "il treno arriva in stazione alle sette" ha questo significato: un osservatore, dotato di orologio, si trova sulla banchina della stazione. Egli verifica che il porsi della lancetta piccola del suo orologio sulle 7 e l'arrivo del treno sono eventi simultanei.

Più in generale[4], *"se nel punto A dello spazio si trova un orologio, un osservatore che si trovi in A può valutare temporalmente gli eventi nell'intorno immediato di A osservando le posizioni delle lancette dell'orologio simultanee con questi eventi. Se anche nel punto B dello spazio si trova un orologio - aggiungeremo, "un orologio esattamente con le stesse proprietà di quello che si trova in A" - allora una valutazione temporale degli eventi nell'intorno immediato di B da parte di un osservatore che si trovi in B è pure possibile."*

1.2 La relatività della simultaneità. Il futuro può precedere il passato

Le considerazioni sulla simultaneità di due eventi (per esempio la caduta di due fulmini in punti distinti della linea ferroviaria) sono state riferite a un sistema di riferimento solidale con le rotaie. Cosa succede rispetto a un altro sistema di riferimento? Si supponga che un treno molto lungo si muova con velocità costante v nella direzione indicata in figura. Ovviamente gli eventi che accadono lungo la banchina possono essere valutati anche dalle persone che si trovano sul treno; il fatto notevole è che i due fulmini, simultanei rispetto alla banchina, *non* lo sono più rispetto al sistema di riferimento solidale con il treno.

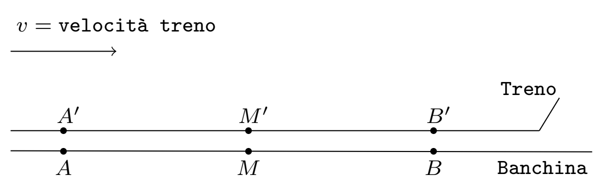

Figura 3

[5]*Allorchè diciamo che i colpi di fulmine* [caduti in] *A e B sono simultanei rispetto alla banchina intendiamo: i raggi di luce provenienti dai punti A e B dove cade il fulmine si incontrano*

[4] [1], pag 4.
[5] [2], pg 61,62.

l'uno con l'altro nel punto medio M *dell'intervallo* AB *della banchina. Ma gli eventi* A *e* B *corrispondono anche alle posizioni* A' *e* B' *del treno. Sia* M' *il punto medio dell'intervallo* $A'B'$ *del treno in moto. Propprio quando si verificano i bagliori del fulmine, questo punto* M' *coincide naturalmente con il punto* M*, ma esso si muove verso la destra del diagramma con la velocità* v *del treno. Se un osservatore seduto in treno nella posizione* M' *non possedesse questa velocità, allora egli rimarrebbe permanentemente in* M *e i raggi di luce emessi dai bagliori del fulmine* A *e* B *lo raggiungerebbero simultaneamente, vale a dire s'incontrerebbero proprio dove egli è situato. Tuttavia nella realtà (considerata con riferimento alla banchina ferroviaria), egli si muove rapidamente verso il raggio di luce che proviene da* B*, mentre corre avanti al raggio di luce che proviene da* A*. Pertanto l'osservatore vedrà il raggio di luce emesso da* B *prima di vedere quello emesso da* A*. Gli osservatori che assumono il treno come loro corpo di riferimento debbono perciò giungere alla conclusione che il lampo di luce* B *ha avuto luogo prima del lampo di luce* A*. Perveniamo così al seguente importante risultato:*

> *gli eventi che sono simultanei rispetto alla banchina non sono simultanei rispetto al treno e viceversa (relatività della simultaneità); ogni corpo di riferimento (sistema di coordinate) ha il suo proprio tempo particolare: un'attribuzione di tempo è fornita di significato solo quando ci venga detto a quale corpo di riferimento tale attribuzione si riferisce.*

2 Gli assiomi della teoria della relatività speciale

L'elemento di novità introdotto dalla teoria della relatività ristretta (speciale) rispetto alla meccanica classica, è l'introduzione di un nuovo assioma: il principio di costanza della velocità della luce; gli altri assiomi coincidono con quelli galileiani. I sistemi di riferimento sono pensati come sistemi di coordinate dotati di regoli e orologi mediante i quali è possibile misurare le coordinate spaziali e temporali di un *evento*. Un evento è un avvenimento fisico che avviene in una precisa posizione dello spazio, in un preciso istante di tempo; è caratterizzato da tre coordinate spaziali (x, y, z) e una coordinata di tempo t. Nei sistemi di riferimento non inerziali non valgono le leggi della dinamica, cioè assumono forma diversa rispetto a quelle della meccanica classica.

Assioma 1. Esistenza di sistemi di riferimento inerziali.

Esistono sistemi di riferimento, detti inerziali, rispetto ai quali i corpi non soggetti a forze si muovono di moto rettilineo uniforme.

Un esempio di sistema inerziale è quello centrato nel sole con gli assi che puntano verso tre stelle lontane. Un sistema che si muove di moto rettilineo uniforme rispetto a un sistema inerziale è anche esso un sistema inerziale.

Non è un sistema di riferimento inerziale quello solidale con un'auto che accelera, oppure quello di una giostra la cui piattaforma ruota a una certa velocità ; non è inerziale il sistema di riferimento solidale con l'aereo nella fase di decollo, eccetera.

Assioma 2. Principio di relatività ristretta.

Se K e K' sono due sistemi di riferimento inerziali (cioè K' si muove, rispetto a K, con velocità uniforme v e senza rotazione) allora un qualunque fenomeno naturale è descritto nel sistema K' dalle stesse precise regole generali che descrivono il fenomeno nel sistema K.

In altre parole, le leggi della fisica hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Segue che *non è possibile stabilire mediante un esperimento se un sistema è in moto rettilineo uniforme rispetto a un altro; nessun sistema di riferimento è privilegiato rispetto a un altro.*

Assioma 3. Principio di costanza della velocità della luce.

Ogni raggio di luce si muove in un qualsiasi sistema inerziale con la stessa velocità c, indipendentemente dal fatto che il raggio di luce sia emesso da un corpo a riposo o in moto.

$$c = \frac{\texttt{cammino della luce}}{\texttt{durata}}$$

L'esperimento di Michelson-Morley aveva mostrato che la luce si propaga in tutte le direzioni con la stessa velocità . Essa non obbedisce alla legge classica di composizione delle velocità (è indipendente dalla velocità dell'oggetto che la emette).

3 Trasformazioni di Lorentz

Siano K e K' sono due sistemi di riferimento inerziali. K indica convenzionalmente l'*osservatore stazionario* e K' l'*osservatore mobile*, v è la velocità (costante) di K' rispetto a K.

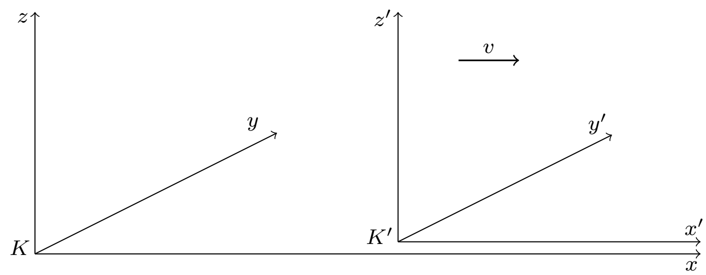

Figura 4: Il sistema di riferimento K' si muove, rispetto a K, con velocità v costante.

Nell'ipotesi che la velocità v abbia la stessa direzione e il medesimo verso dell'asse x le trasformazioni di Lorentz sono date da

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \\ t' &= \frac{t - \dfrac{v}{c^2}\,x}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

Per ottenere le trasformazioni inverse che esprimono le coordinate spazio-temporali misurate rispetto al sistema di riferimento K in funzione di quelle misurate rispetto a K' bisogna sostituire, nelle uguaglianze scritte sopra, i simboli con apice con quelli senza apice e viceversa e la velocità v con $-v$ (che fornisce la velocità di K rispetto a K')

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \\
t &= \frac{t' + \dfrac{v}{c^2}\, x'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}
\end{aligned}
$$

3.1 Osservazioni sul fattore γ e sulla non contemporaneità degli eventi

1 La velocità della luce è la massima velocità possibile.

Il fattore $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ è detto *fattore di Lorentz*. Deve essere $|v| < c$, cioè

la velocità relativa di un sistema inerziale rispetto a ogni altro è sempre inferiore alla velocità della luce.

Questa condizione impone anche un *limitazione alla velocità delle particelle*, nel senso che

una particella non può essere accelerata fino a farle raggiungere una velocità uguale o superiore a quella della luce.

Infatti, se così non fosse, dovrebbe essere possibile accelerare una particella fino al raggiungimento di una velocità $v \geq c$. Se a questo punto si smettesse di accelerare la particella e la si lasciasse libera essa continuerebbe a muoversi con velocità costante v; sarebbe pertanto possibile associarle un sistema di riferimento inerziale che traslerebbe rispetto al primo con velocità maggiore o uguale a quella della luce, contro le limitazioni imposte dalle trasformazioni di Lorentz.

2 La teoria della relatività non falsifica quella newtoniana.

Nella seguente tabella si riporta il fattore $\boldsymbol{\gamma}$ (di Lorentz) di alcuni sistemi. Le velocità v sono calcolate rispetto a un osservatore solidale con il laboratorio.

Oggetto	**velocità (km/h)**	**velocità (m/s)**	v/c	γ
Laboratorio	0	0	0	1
Boeing 747	920	256	$8,5 \cdot 10^{-7}$	$1,0000000000$
Boeing The son of blackbird	6 000	1 667	$5,6 \cdot 10^{-6}$	$1,0000000000$
Aereo X-15	7 300	2 028	$6,8 \cdot 10^{-6}$	$1,0000000000$
Satellite GPS	13 600	3 778	$1,3 \cdot 10^{-5}$	$1,0000000001$
Terra/Sole	108 000	30 000	$1,0 \cdot 10^{-4}$	$1,0000000050$
Sole/Galassia	900 000	250 000	$8,3 \cdot 10^{-4}$	$1,0000003472$
		3 000 000	$1,0\%$	$1,0000500038$
		30 000 000	10%	$1,0050378153$
		90 000 000	30%	$1,0482848367$
		150 000 000	50%	$1,1547005384$
	936 000 000	260 000 000	$86,7\%$	$2,0044593143$
			$94,1\%$	$2,9550254562$
Muoni atmosferici			$99,5\%$	$10,0125234864$
			$99,92\%$	$25,0050015005$
			$99,995\%$	$100,0012500234$
			$99,9998\%$	$500,0002500083$
Protoni LHC-CERN		299 792 455	$99,999999\%$	~ 7071
Luce nel vuoto		299 792 458	100%	∞

Il fattore γ dice quanto rapidamente ci si muove: se $\gamma \sim 1$ allora le velocità sono molto piccole, più γ è grande più ci si avvicina alla velocità della luce.

Inoltre per γ prossimo a 1, cioè per velocità $v \ll c$, le trasformazioni di Lorentz si riducono a quelle di Galileo ($x' = x - vt$, $t' = t$). In altri termini, per velocità molto inferiori rispetto alla velocità della luce, la teoria della relatività speciale si riduce alla teoria newtoniana della meccanica classica.

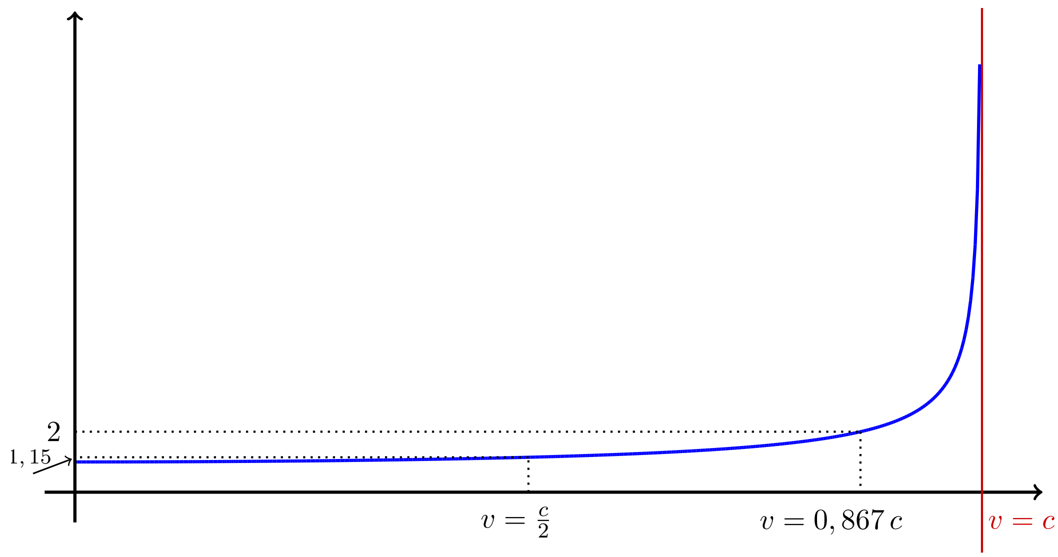

Figura 5: Il grafico di $\gamma = \gamma(v)$ cresce lentamente. Quando v è la metà di c il fattore γ vale $1,15$; γ raddoppia quando $v = 0,867\,c$.

3 La contemporaneità è relativa, cioè dipende dalla scelta del sistema inerziale.

La seconda delle trasformazioni di Lorentz

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}\,x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.1}$$

implica la

non assolutezza della contemporaneità .

Gli eventi contemporanei in K' si ottengono assegnando un valore particolare al tempo t'. Per esempio da (3.1), ponendo $t' = 0$, si ottiene $\dfrac{t - \frac{v}{c^2}\,x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 0$. Questa uguaglianza, letta nel sistema di riferimento K, non coincide con un sottoinsieme di contemporaneità per K, cioè con un sottoinsieme definito da $t = \text{cost}$. Infatti si ha

$$t = \frac{v\,x}{c^2} \tag{3.2}$$

In altre parole, per conoscere il tempo t' di K' non basta conoscere il tempo t di K, ma occorre conoscere anche la posizione x rispetto a K. Lorentz sintetizzava questo fatto dicendo che il "tempo è locale".

3.2 Come si comportano aste rigide e orologi in movimento

3.3 Contrazione delle lunghezze.

Un'asta rigida si trova nel sistema K' e un osservatore, solidale con K', verifica che il suo estremo di sinistra, diciamo A, si trova in x'_A e il suo estremo di destra, diciamo B, è in x'_B. Per trovare la lunghezza dell'asta rispetto al sistema di riferimento K è sufficiente determinare le coordinate spaziali di A e B rispetto al sistema K in un particolare istante di tempo di K.

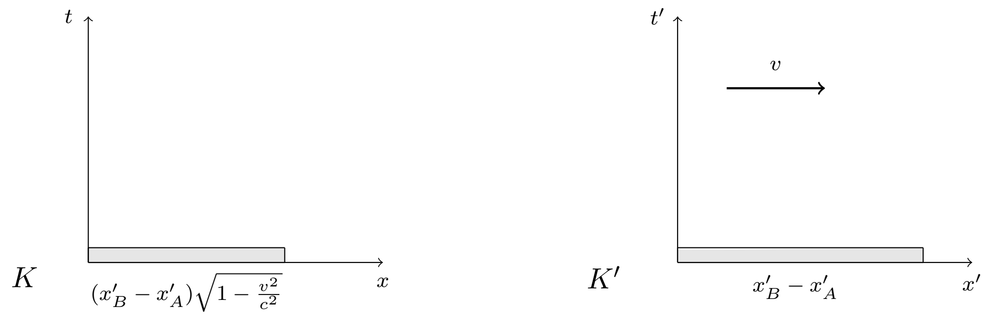

Figura 6: L'asta rigida, misurata rispetto a K, risulta più corto.

La prima delle trasformazioni di Lorentz, esplicitata rispetto a x, è

$$x = vt + x'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{3.3}$$

All'istante $t = 0$ le estremità A e B dell'asta, dal punto di vista di K, hanno le seguenti coordinate spaziali:

$$x_A = 0 + x'_A\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{3.4}$$

$$x_B = 0 + x'_B\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{3.5}$$

Ciò significa che l'asta rigida lunga $x'_B - x'_A$ (misurata in K') risulta lunga $(x'_B - x'_A)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, se misurata in K. Dunque *un'asta rigida che si muove nella direzione della propria lunghezza con velocità v risulta più corta quando è in moto che non quando è in quiete, e tanto più corta quanto più rapidamente si muove.*

$$\Delta x = \Delta x'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Nel caso (limite) in cui $v = c$ la sua lunghezza, misurata da K, risulterebbe nulla.

Nel caso si fosse scelto un'asta AB posizionata lungo l'asse x di K la cui lunghezza (misurata in K) è $x_B - x_A$, si sarebbe trovato che essa, giudicata da K', ha lunghezza $(x_B - x_A)\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, in accordo con il principio di relatività (la verifica di questo fatto è lasciata per esercizio).

3.4 Dilatazione dei tempi.

Un orologio è posto in quiete rispetto a K' in $x' = 0$. Un osservatore solidale con K' rileva che un certo evento ha inizio all'istante t'_1 e termina a t'_2. Un altro osservatore, solidale con K, misura lo stesso evento servendosi di un orologio[6] in quiete rispetto a K. Dalla seconda trasformazione di Lorentz si ricava, per $x' = 0$:

$$t_1 = \frac{t'_1 + 0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.6}$$

e

$$t_2 = \frac{t'_2 + 0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.7}$$

Per l'osservatore posto in K, (che vede l'orologio di K' muoversi con velocità v) la durata dell'evento è

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.8}$$

Quindi, giudicato da K, la durata dell'evento non è $t'_2 - t'_1$, ma $\dfrac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, ossia un tempo un po' maggiore. Come conseguenza del proprio moto l'orologio di K' cammina più lentamente di quello in quiete, ossia

$$\Delta t \;=\; \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

[6] I due orologi sono supposti identici.

3.5 Decadimento del muone

Il muone è una particella elementare che si crea quando i raggi cosmici raggiungono l'alta atmosfera: paragonata all'elettrone ha stessa carica e massa circa 207 volte più grande[7]. Esso possiede una "vita media" di $2,2\ \mu$s, ciò significa che la metà dei muoni scompare in un tempo di $2,2$ microsecondi, trasformandosi il più delle volte in una coppia neutrino-antineutrino. Inoltre i muoni possiedono una velocità elevatissima, molto prossima a quella della luce: $v = 0,995\ c$.

Ha destato una certa sorpresa scoprire sperimentalmente che circa la metà dei muoni prodotti dai raggi cosmici arriva sulla Terra. Infatti, supponendo che il muone "nasca" a 5 km di distanza dalla Terra, la fisica classica prevede che esso sia in grado di percorrere una distanza pari a soli

$$v\,t = 0,995 \cdot (3 \cdot 10^8 \mathrm{m/s}) \cdot (2,2 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{s}) = 657\ \mathrm{m} \tag{3.9}$$

molto inferiore ai 5000 m che separano la Terra dall'alta atmosfera.

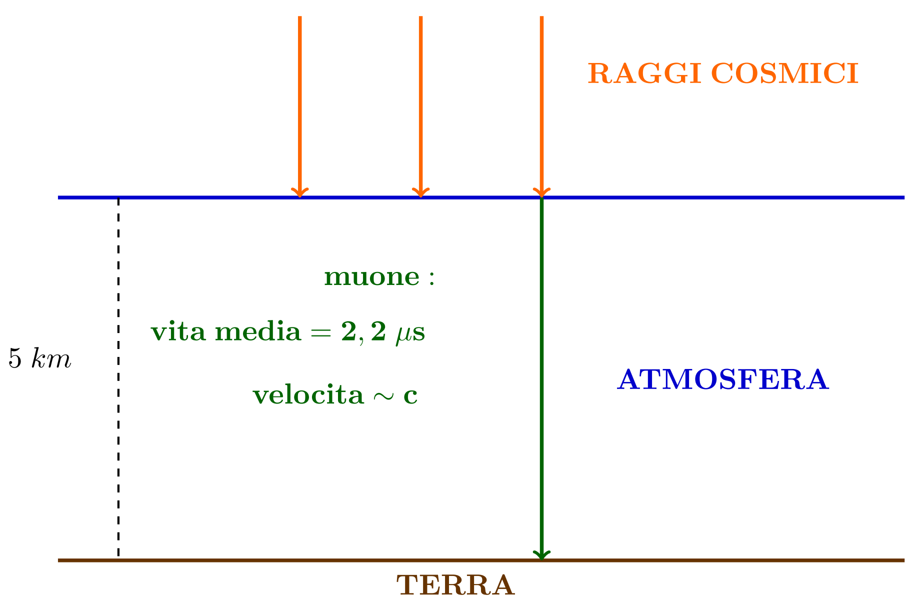

Figura 7

Se si vuole comprendere il reale comportamento del muone bisogna utilizzare la teoria della relatività speciale: la vita media di $2,2\ \mu$s è il suo tempo proprio Δt_0, ovvero la durata media di vita che misura un osservatore solidale con il muone stesso. Detto altrimenti, $2,2\ \mu$s è il "tempo di vita " del muone quando è in quiete.

[7]Si può pensare al muone come a un elettrone "pesante".

Un osservatore solidale con la terra vede il muone muoversi alla velocità di $0,995\,c$ e pertanto misura una vita media Δt dilatata, ossia

$$\Delta t = \gamma\,\Delta t_0 = \frac{2,2 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{s}}{\sqrt{1 - 0,995^2}} = 22\ \mu\mathrm{s} \tag{3.10}$$

Essa è circa 10 volte il suo tempo proprio; di conseguenza, la distanza che può percorrere in questo tempo è

$$v\,\Delta t = 0,995\,c \cdot 22\ \mu\mathrm{s} = 6567\ \mathrm{m} \tag{3.11}$$

distanza che giustifica la presenza dei muoni atmosferici osservati a livello della superficie terrestre.

Se, altrimenti, ci si pone dal punto di vista di un osservatore solidale con il muone, che vede la Terra avvicinarsi con velocità v, è l'altezza L dell'atmosfera a contrarsi

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = 5000\ \mathrm{m}\ \sqrt{1 - 0,995^2} = 499\ \mathrm{m} \tag{3.12}$$

cioe l'altezza dell'atmosfera appare a questo osservatore circa 10 volte più piccola.

Riassumendo: dalla Terra si vede un muone con un tempo di vita che è circa 10 volte la sua vita media, dal muone si vede l'altezza dell'atmosfera 10 volte più corta. Tutto sembra relativo, ma in realtà entrambi gli osservatori "vedono" la stessa cosa: un gran numero di muoni che raggiungono la Terra.

3.6 Teorema di addizione delle velocità

Teorema 3.1 (**di addizione delle velocità**). *Sia K' un sistema di riferimento che si muove orizzontalmente, da sinistra verso destra, con velocità v (uniforme) rispetto al sistema K. Sia inoltre w' la velocità (uniforme) di un oggetto, misurata nel sistema K'.*

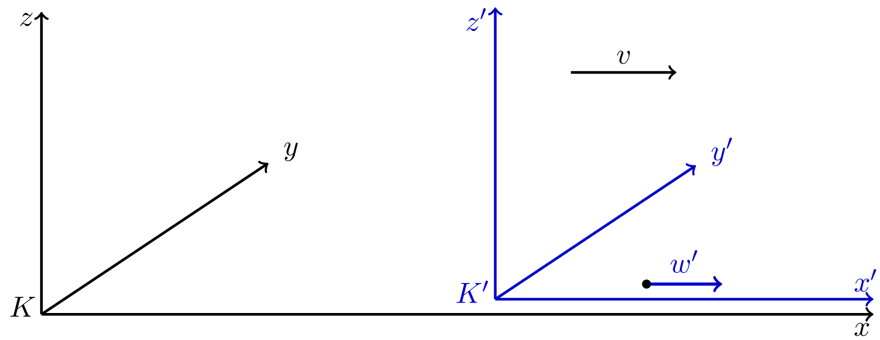

Figura 8

Allora la velocità del medesimo oggetto, misurata in K è

$$w = \frac{v + w'}{1 + \frac{vw'}{c^2}}$$

Prima dimostrazione.

Se un oggetto si muove, rispetto al sistema K', con velocità uniforme w', il suo moto è regolato (in K') dall'equazione $x' = w't'$. Utilizzando le trasformazioni di Lorentz, è possibile esprimere x' e t' in funzione di x e t: la prima equazione di Lorentz assume la forma

$$w't' = \gamma\,(x - vt) \tag{3.13}$$

e sostituendo in (3.13) l'equazione di Lorentz che esprime t' si ottiene

$$w'\,\gamma(t - \frac{v}{c^2}x) = \gamma(x - vt) \tag{3.14}$$

Infine, esplicitando rispetto a x si ha:

$$x = \frac{v + w'}{1 + \frac{vw'}{c^2}}\,t \tag{3.15}$$

dove, la quantità $\frac{v+w'}{1+\frac{vw'}{c^2}}$ indica la velocità w dell'oggetto rispetto al sistema di riferimento K.

∎

Seconda dimostrazione.

Dalle trasformazioni di Lorentz

$$\begin{cases} x = & \gamma\,(x' + vt') \\ t = & \gamma\left(t' + \dfrac{v}{c^2}x'\right) \end{cases}$$

differenziando, si ottiene:

$$\begin{cases} dx = & \gamma(dx' + vdt') \\ dt = & \gamma\left(dt' + \dfrac{v}{c^2}dx'\right) \end{cases}$$

Quindi la velocità $w = \frac{dx}{dt}$ dell'oggetto, misurata in K, è

$$\begin{aligned} w &= \tfrac{dx}{dt} \\ &= \frac{\gamma(dx' + vdt')}{\gamma\left(dt' + \dfrac{v}{c^2}dx'\right)} \\ &= \frac{\dfrac{dx'}{dt'} + v}{1 + \dfrac{v}{c^2}\dfrac{dx'}{dt'}} \\ &= \frac{w' + v}{1 + \dfrac{vw'}{c^2}} \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Come si sommano le velocità . Due esempi.

1. *Se* $w' = c$ *allora* $w = c$, cioè $\boldsymbol{v + c = c}$.

   Infatti, se la velocità dell'oggetto, misurata in K' è $w' = c$ allora da (3.1) si ricava:

   $$w = \frac{c + v}{1 + \dfrac{vc}{c^2}} = c$$

2. *Se* $v = c$ *allora* $w = c$, cioè $\boldsymbol{c + w' = c}$.

   Infatti, se la velocità del sistema K' (rispetto a K) è $v = c$ da (3.1) si ricava:

   $$w = \frac{w' + c}{1 + \dfrac{cw'}{c^2}} = c$$

Nella tabella seguente sono riportate le velocità di un medesimo oggetto in due sistemi di riferimento la cui velocità relativa di uno rispetto all'altro è $v = 0,9$

$\mathbf{v = 0,9}$	$\mathbf{w'}$	$\mathbf{w}$
	0	$0,9$
	$0,1\,c$	$0,917$
	$0,2\,c$	$0,932$
	$0,3\,c$	$0,945$
	$0,4\,c$	$0,956$
	$0,5\,c$	$0,966$
	$0,6\,c$	$0,974$
	$0,7\,c$	$0,982$
	$0,8\,c$	$0,988$
	$0,9\,c$	$0,994$
	$0,95\,c$	$0,997$
	c	c

4 Definizioni e risultati generali della meccanica relativistica

4.1 Massa relativistica

$$M = \frac{M_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\, M_0 \tag{4.1}$$

La massa M alla quale qui ci si riferisce è la massa *inerziale* cioè "la quantità di materia" di un corpo che entra in gioco nel secondo principio della dinamica: $F = ma$. La quantità M_0 indica la cosiddetta *massa a riposo*, cioè la massa del corpo misurata in un sistema di riferimento rispetto al quale il corpo è in quiete.

Risulta sempre $M \geq M_0$. Infatti il fattore $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ è maggiore o uguale a 1; per velocità "piccole" γ vale circa 1 e le masse risultano praticamente costanti. Invece per velocità prossime a quella della luce, la variazione di massa diventa importante, per $v \to c$, M tende a $+\infty$.

4.2 Quantità di moto

$$\mathbf{P} = \frac{M_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,\mathbf{v} \tag{4.2}$$

4.3 Energia

Nel settembre del 1905 Einstein pubblica un secondo articolo dal titilo "*L'inerzia di un corpo dipende dalla sua energia?* ". Egli scrive: "*Se un corpo perde l'energia E sotto forma di radiazioni, la sua massa diminuisce di $\frac{E}{c^2}$. Il fatto che l'energia sottratta al corpo diventi energia di radiazione non fa alcuna differenza, perciò siamo portati alla più generale conclusione che la massa di qualunque corpo è la misura del suo contenuto di energia.*"

Quindi una particella di massa M, in moto con velocità v, possiede energia

$$E = M_0\,\gamma\,c^2 = Mc^2 \tag{4.3}$$

Tenendo conto dell'uguaglianza (4.1) si ottiene

$$E = \frac{M_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\;c^2 \tag{4.4}$$

In fisica classica energia e massa non hanno alcun legame; la legge di conservazione della massa e la legge di conservazione dell'energia sono due principi differenti. Nella teoria della relatività massa e energia sono equivalenti secondo l'uguaglianza (4.3).

Poichè c^2 è un numero molto grande, l'energia è equivalente a una quantità molto piccola di massa mentre la massa è equivalente a una quantità molto grande di energia. Per esempio, la quantità di energia per mezzo della quale è possibile trasformare in vapore 10^6 kg di acqua è equivalente a una massa di meno di 30 mg; diversamente un grammo di massa di un corpo qualsiasi corrisponde a una quntità elevatissima di energia: circa $9 \cdot 10^{20}$ erg.

La fisica classica si limita a studiare processi per i quali l'energia varia di poco; per tali processi la legge di conservazione della massa è ancora valida. Inoltre, se non si ha a che fare con trasformazioni di materia corpuscolare in radiazione (come nel caso delle reazioni nucleari) anche la legge di conservazione dell'energia è valida. Quindi la teoria della relatività ristretta non falsifica la fisica classica ma ne definisce i limiti di validità.

Un altra differenza tra le due teorie è la seguente: in fisica classica la velocità di un corpo può crescere indefinitamente mentre la sua massa rimane costante, in relatività esiste un limite superiore per le velocità ($v < c$) mentre massa e energia cinetica possono crescere indefinitamente al tendere di v a c.

Se $v = 0$ l'energia della particella non è zero, vale

$$E_0 = M_0\, c^2 \tag{4.5}$$

Ciò significa che una particella possiede una quantità di energia pari a $M_0\, c^2$, che è indipendente dal suo stato di moto. L'energia intrinseca di una particella si chiama "energia a riposo". Durante un'esplosione nucleare parte della massa M_0 viene distrutta e una enorme quantità dell'energia $M_0\, c^2$ viene convertita e poi liberata. In generale, se fosse possibile distruggere una massa a riposo M_0, si libererebbe una quantità di energia pari a $M_0\, c^2$.

Se $v \to c$ l'energia E tende a $+\infty$.

Il caso $v << c$

Come si è detto

$$E = M_0\, c^2 \gamma = M_0\, c^2 \, \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{4.6}$$

Se $v << c$, il rapporto $\frac{v}{c}$ è piccolo rispetto all'unità. Allora, approssimando al secondo ordine[8]

$$\begin{aligned} E &= M_0\, c^2 \gamma \\ &\sim M_0\, c^2 \left(1 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{v}{c}\right)^2 + \tfrac{3}{8}\left(\tfrac{v}{c}\right)^4\right) \\ &= M_0\, c^2 + M_0\, c^2\, \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{v}{c}\right)^2 + M_0\, c^2\, \tfrac{3}{8}\left(\tfrac{v^4}{c^4}\right) \end{aligned} \tag{4.7}$$

Il primo termine $M_0\, c^2$ non contiene la velocità mentre il terzo, $\frac{3}{8} m\, \frac{v^4}{c^2}$, è trascurabile (nell'ipotesi $v << c$). Quindi

$$E \sim M_0\, c^2 + \frac{1}{2} M_0 v^2 = E_0 + E_C \tag{4.8}$$

[8]cioè L'approssimazione in serie di Taylor arrestata al secondo ordine della funzione $\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. è : $1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{3}{8}x^4$.

L'uguaglianza (4.8) si interpreta così: l'energia E di un corpo è la somma di più termini, uno costante (cioè E_0, l'energia a riposo) e uno che è l'energia cinetica della meccanica classica (cioè $E_C = \frac{1}{2}M_0 v^2$).

Quindi un corpo in quiete possiede sempre energia $E_0 = M_0 c^2$. Distruggendo il corpo e convertendo parte della sua massa in energia, si possono produrre energie elevatissime.

5 Tutto è relativo?

Un luogo comune abbastanza diffuso consiste nell'affermare che in "Relatività tutto è relativo". In effetti lo spazio e il tempo sono relativi, tuttavia altre grandezze sono assolute. Alcuni esempi:

1. La *velocità c della luce* è la stessa in tutti i sistemi di riferimento.

2. La *lunghezza propria ΔL_0* di un certo oggetto cioè la sua lunghezza misurata da un osservatore che è in quiete rispetto all'oggetto. ΔL_0 è la *massima lunghezza* che un qualunque osservatore può misurare per quell'oggetto.

3. Il *tempo proprio Δt_0* di un certo evento cioè la sua durata, misurata da un osservatore che è in quiete rispetto a quell'evento. Δt_0 è la *durata minima* che un qualunque osservatore può misurare per quell'evento.

4. La *massa a riposo Δm_0* di un corpo, cioè la sua massa misurata da un osservatore che è in quiete rispetto al corpo. m_0 è *la piu piccola massa* che un qualunque osservatore può misurare per quel corpo.

6 Appendice

6.1 Deduzione delle trasformazioni di Lorentz

In *Relatività. Esposizione divulgativa*, A. Einstein deduce le trasformazioni di Lorentz secondo lo schema qui sotto riportato.

1. Si consideri un raggio di luce che si propaga con direzione e verso coincidente con quello dell'asse x. Rispetto al sistema di riferimento K, la sua posizione all'istante t è $x = ct$, dove c è la velocità della luce nel vuoto; quindi il raggio di luce si propaga, rispetto a K, secondo l'uguaglianza

$$x - ct = 0 \tag{6.1}$$

   Per il principio di costanza della velocità della luce, il raggio luminoso si propaga rispetto al sistema di riferimento K' con la medesima velocità c, cioè si propaga rispetto a K' secondo l'uguaglianza

$$x' - ct' = 0 \tag{6.2}$$

   Quindi, ammessa la validità del principio di costanza della velocità della luce, da (6.1) segue (6.2) e ovviamente, per questioni di simmetria, da (6.2) segue (6.1).

   Se si ripete lo stesso ragionamento per un raggio luminoso che si propaga nella direzione dell'asse x con verso opposto si ottiene l'uguaglianza $x+ct = 0$ nel sistema di rifermento K e l'uguaglianza $x' + ct' = 0$ nel sistema K'.

   Riassumendo, rispetto ai sistemi di riferimento K e K', si ha

$$x - ct = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x' - ct' = 0 \tag{6.3}$$
$$x + ct = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x' + ct' = 0 \tag{6.4}$$

2. Si dimostra che (6.3) e (6.4) sono equivalenti, nell'ordine, a

$$x' - ct' = \lambda\,(x - ct) \tag{6.5}$$
$$x' + ct' = \mu\,(x + ct) \tag{6.6}$$

   con λ, μ numeri reali.

3. Sommando e sottraendo le uguaglianze (6.5), (6.6) si ottiene:

$$x' = \alpha x - \beta\, ct \tag{6.7}$$
$$ct' = \alpha\, ct - \beta x \tag{6.8}$$

   dove si è posto $\alpha = \frac{\lambda+\mu}{2}$, $\beta = \frac{\lambda-\mu}{2}$.

4. Se K' trasla con velocità v rispetto a K allora

$$v = \frac{\beta\, c}{\alpha} \tag{6.9}$$

Infatti, per determinare la velocità con cui K' si muove rispetto a K basta trovare la velocità di un suo punto. Ponendo, per esempio, $x' = 0$ in (6.7) si ha $v = \dfrac{x}{t} = \dfrac{\beta\, c}{\alpha}$.

5. `Determinazione delle costanti` α `e` β.

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{6.10}$$

$$\beta = \frac{v}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{6.11}$$

Einstein osserva che il regolo unitario di K' ha una lunghezza diversa se osservato da K, e analogamente il regolo di K ha una lunghezza diversa se osservato da K'. Poi, utilizzando il principio di relatività, richiede che le due lunghezze, misurate dai due diversi sistemi di riferimento, siano uguali.

Il ragionamento di Eistein è pressappoco questo: sia r'_1 il regolo di K' aventi per estremi $x' = 0$ e $x' = 1$; esso è in quiete rispetto a K' e, per ogni t' (tempo di K'), la lunghezza di r'_1 è uguale a 1.

Si scatti una fotografia (una istantanea) di r'_1 dal sistema di riferimento K: per farlo è necessario assegnare a t (tempo di K) un valore particolare, per esempio $t = 0$; da (6.7) si ottiene

$$x' = \alpha\, x \tag{6.12}$$

Al tempo $t = 0$ l'estremo di sinistra del regolo r'_1 si trova in $x = 0$ mentre l'estremo di destra è in $x = \frac{1}{\alpha}$ (per convincersene basta porre $x' = 0$ e $x' = 1$ nell'uguaglianza (6.12) e esplicitare rispetto a x). Allora il regolo r'_1, che in K' ha lunghezza $\Delta x' = 1$ misura nella nostra fotografia

$$\Delta x = \frac{1}{\alpha} \tag{6.13}$$

In modo analogo, sia r_1 il regolo di K avente per estremi $x = 0$ e $x = 1$; esso è in quiete rispetto a K e, per ogni t (tempo di K), la lunghezza di r_1 è uguale a 1.

Per realizzare una istantanea di r_1 da K' bisogna assegnare a t' (tempo di K') un valore particolare, per esempio $t' = 0$; le uguaglianze (6.7) e (6.8) assumono la forma

$$\begin{cases} x' &= \alpha x - \beta\, ct \\[2ex] t &= \dfrac{\beta}{\alpha\, c}\, x \end{cases}$$

Sostituendo nella prima uguaglianza il valore di t che si è trovato nella seconda si ottiene

$$x' = \alpha - \frac{\beta^2}{\alpha} x = \alpha \left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) x \tag{6.14}$$

Infine, ricordando che $\frac{v}{c} = \frac{\beta}{\alpha}$ (si veda l'uguaglianza 6.9), si ricava

$$x' = \alpha \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) x \tag{6.15}$$

Pertanto il regolo r_1, che in K ha lunghezza $\Delta x = 1$, misura nella nostra fotografia

$$\Delta x' = \alpha \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \tag{6.16}$$

Per il principio di relatività, le misure Δx e $\Delta x'$ dei due regoli, devono essere uguali. Dunque si ottiene

$$\frac{1}{\alpha} = \alpha \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \tag{6.17}$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{6.18}$$

e, da (6.9) si ha

$$\beta = \frac{v}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{6.19}$$

6. Sostituendo i valori di α e β in (6.7), (6.8) si ottengono le trasformazioni di Lorentz (3.1) e (3.1).